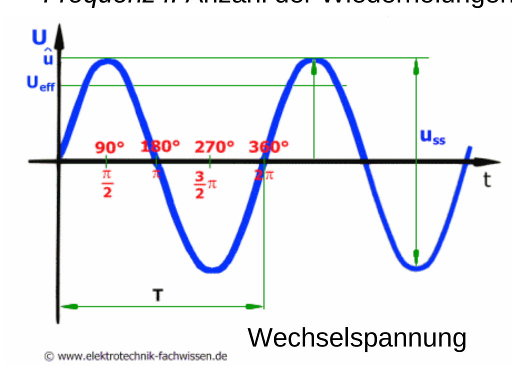
4. Signalverarbeitung

Weiterführende Literatur (z.B.):

Beate Meffert, Olaf Hochmuth: Werkzeuge der Signalverarbeitung, Pearson 2004

Frequenz und Periode

- Viele Signale sind *periodisch* oder enthalten periodische Anteile
- Periodisch: Signalverlauf wiederholt sich regelmäßig
- *Periodenlänge T*: Dauer (in s bei zeitabhängigen Signalen) bis zum Beginn der nächsten Wiederholung
- *Frequenz f:* Anzahl der Wiederholungen pro Sekunde (Hz)



Wechselspannung

$$T = \frac{1}{f}$$

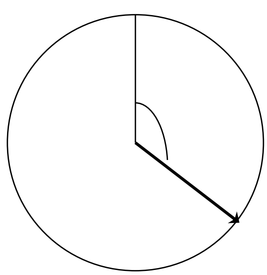
Wellenlänge

- Die Länge λ einer Welle (d.h. der Abstand bis zur nächsten Wiederholung) bestimmt sich aus der Periodenlänge *T* und der Ausbreitungsgeschwindigkeit *c*

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$$

Gradmaß und Bogenmaß

- Die Größe eines Winkels kann in Grad oder als Anteil am Umfang des Einheitskreises (2π) angegeben werden.

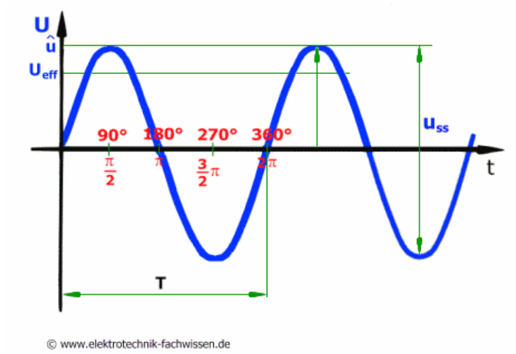


Gradmaß	Bogenmaß
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3/2 \cdot \pi$
360°	$2 \cdot \pi$

Kreisfrequenz

- Die Kreisfrequenz ω gibt den pro Sekunde von einem drehenden Zeiger überstrichenen Winkel im Bogenmaß an (Hz)

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$



4. Signalverarbeitung

4.1 Grundbegriffe
4.2 Frequenzspektren, Fourier-Transformation
4.3 Abtasttheorem: Eine zweite Sicht
4.4 Filter

Weiterführende Literatur (z.B.):

Beate Meffert, Olaf Hochmuth: Werkzeuge der Signalverarbeitung, Pearson 2004

Frequenzspektrum

- Jede Funktion kann als Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen verstanden werden.
- Mathematisch (Fourier-Transformation):

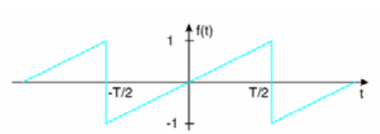
$$F(\omega) = \int f(t)\cos(2\pi\omega t)dt + i\int -f(t)\sin(2\pi\omega t)dt$$

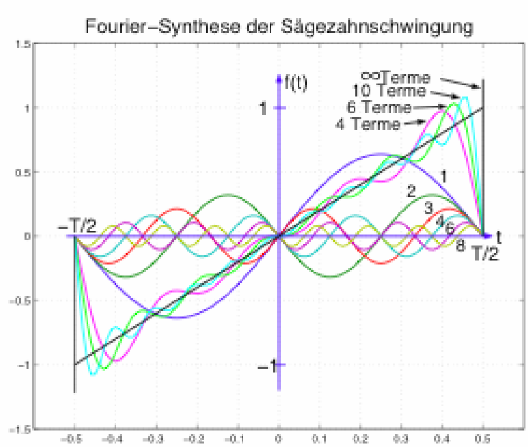
$$F(\omega) = \int f(t)e^{-2\pi i\omega t}dt$$

- Praktisch:
  - Jedes Signal setzt sich aus einer Überlagerung verschiedener Frequenzen zusammen.
  - Statt über das Signal zu reden, können wir auch über die Frequenzzusammensetzung des Signals reden (das *Frequenzspektrum*).
  - Eine Funktion im *Frequenzraum* gibt an, welchen Anteil eine bestimmte Frequenz am Signal hat.
- Es gibt eine 1:1-Transformation zwischen Zeit- und Frequenzraum.

Beispiel: Sägezahnfunktion (1)

- Sägezahnfunktion als Überlagerung von Sinusfunktionen

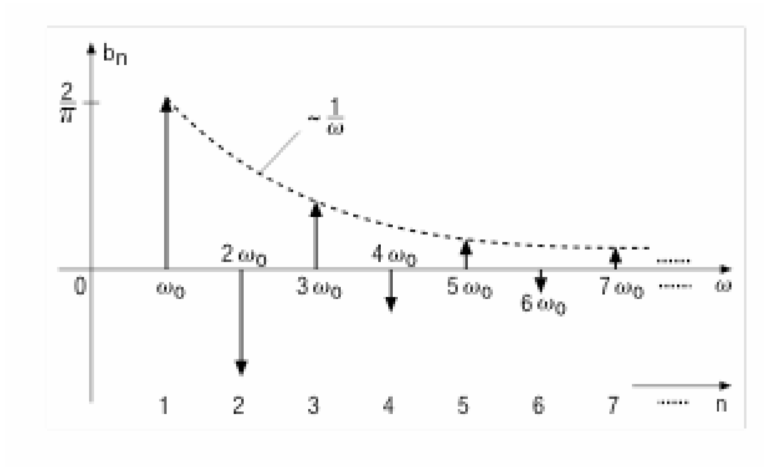




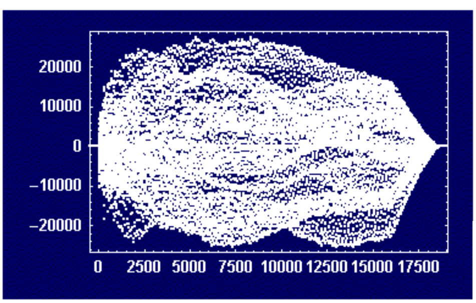
Quelle: D. Rudolph,
TFH Berlin

Beispiel: Sägezahnfunktion (2)

- Darstellung der Sägezahnfunktion im Frequenzraum



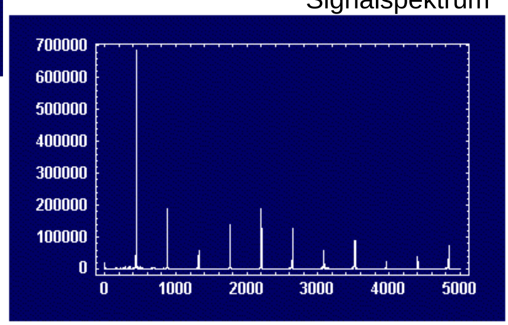
Beispiel: Frequenzspektrums eines Klangs



Zeitabhängige Signalstärke

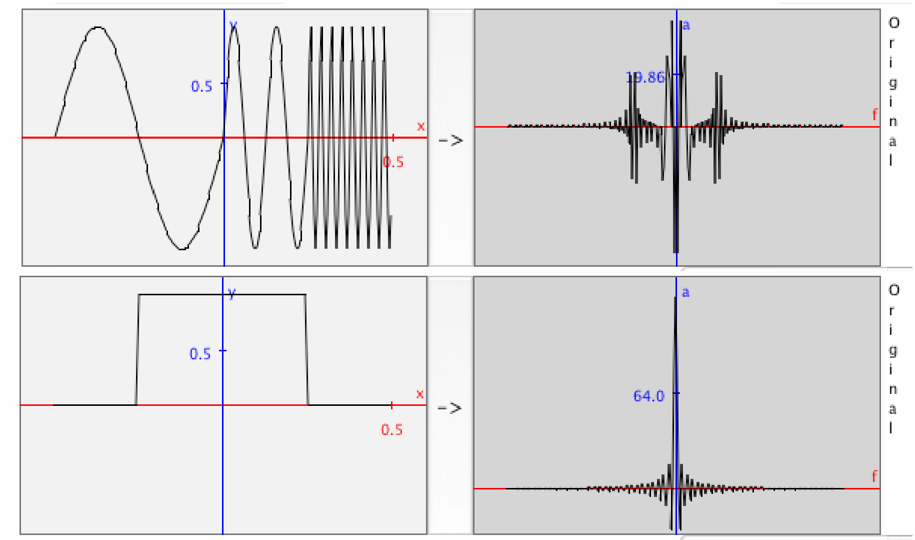
Cello-Ton

Signalspektrum



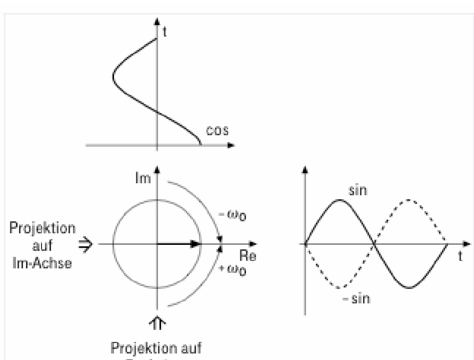
Quelle: www.numberland.de

Frequenzspektrum: Beispiele



Negative Frequenzen?

- In den Fourier-Spektren kommen negative Frequenzwerte vor
  - Immer symmetrische Darstellung der Spektralfunktion
- Ergebnis einer formalen Vereinfachung zum bequemeren Rechnen
  - Verwendung komplexer Zahlen (Euler-Gleichungen)



Eigenschaften des Frequenzspektrums (Auswahl)

- Wenn die Zeitfunktion periodisch ist, ergibt sich immer ein Spektrum, das aus äquidistanten Linien besteht.
  - Linienabstand $\omega = 2\pi/T$
- Die Linienhöhe bei Frequenz 0 entspricht dem *Gleichanteil* des Signals
- Die 1. Nullstelle der Spektral-Hüllkurve liegt bei $2\pi/\tau$, wobei τ der Impulsbreite (z.B. bei einem Rechteck-Signal) entspricht

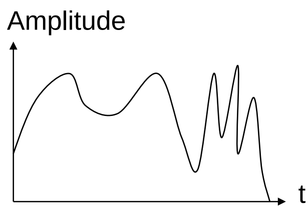
4. Signalverarbeitung

Weiterführende Literatur (z.B.):

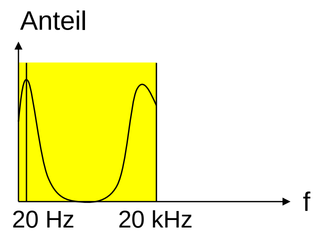
Beate Meffert, Olaf Hochmuth: Werkzeuge der Signalverarbeitung, Pearson 2004

Bandbreitenbegrenzung

- Die meisten Signale haben eine obere und untere *Grenzfrequenz*, d.h. niedrigere oder höhere Frequenzen kommen nicht vor.
- Bsp. Audio-Signale liegen im menschlichen Hörbereich
  - ca. 20 Hz bis 20 kHz



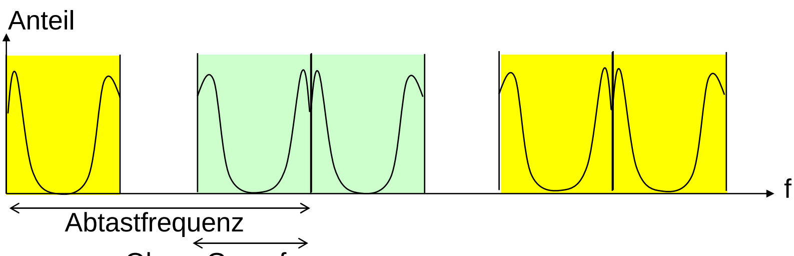
Zeitabhängige Signaldarstellung



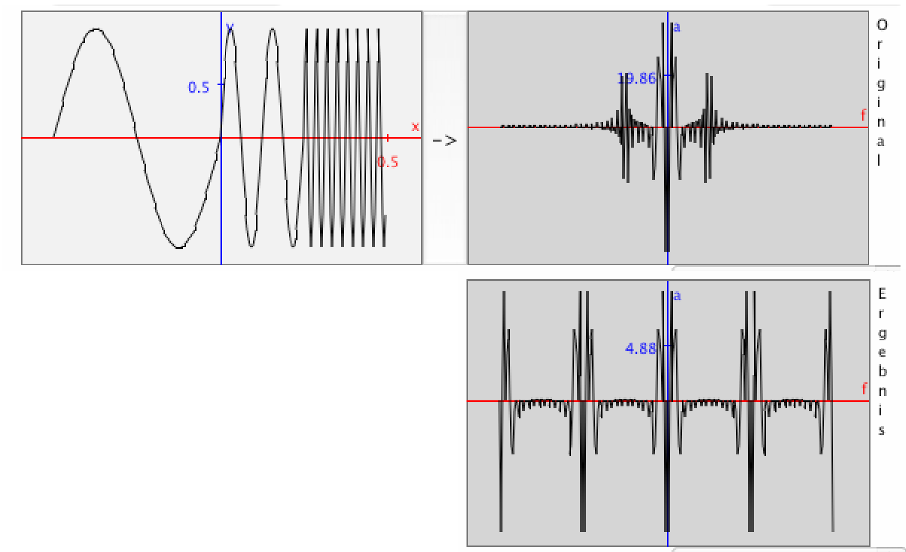
Frequenzabhängige Signaldarstellung

Abtastung im Frequenzraum

- Abtastung ist die punktweise Multiplikation der beobachteten Funktion mit einer Kamm-Funktion
- Mutliplikation in der zeitabhängigen Darstellung entspricht einer *Faltung* im Frequenzraum
  - Kamm-Funktionen sind auch im Frequenzraum Kamm-Funktionen
  - Effekt der Abtastung im Frequenzraum:
    - » Originalspektrum wiederholt sich im Abstand der Abtastfrequenz
    - » Originalspektrum wird im Ursprung und den Wiederholungen gespiegelt

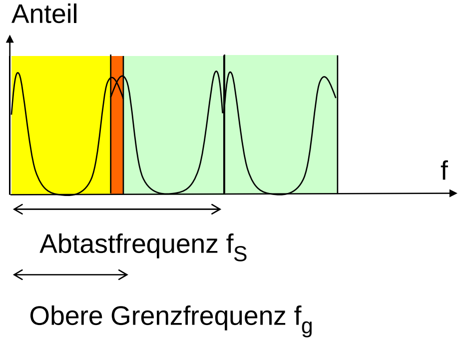


Abtastung: Beispiel



Aliasing

- Wenn sich die wiederholten Frequenzspektren überlappen, kommt es zur Bildung nicht vorhandener (Alias-) Frequenzen im rekonstruierten Signal.



Aliasing wird vermieden, wenn $2*f_g < f_S$

4. Signalverarbeitung

Weiterführende Literatur (z.B.):

Beate Meffert, Olaf Hochmuth: Werkzeuge der Signalverarbeitung, Pearson 2004

Frequenzfilter

- Filter sind Operationen oder Baugruppen, die selektiv bestimmte Frequenzbereiche des Signals beeinflussen.
  - Ideale Filter: Blenden bestimmte Frequenzen vollständig aus, lassen andere Frequenzen vollständig unverändert
- Filter werden an verschiedenen Stellen der Signalverarbeitung verwendet
- Beispiele:
  - Tonhöhenregelung beim Klang (“Equalizer”)
  - Frequenzweichen in Lautsprechersystemen
  - Farbabstimmung bei Bildern (“Farbfilter”)
  - Vorfilterung von Signalen vor Digitalisierung (um Abtasttheorem einzuhalten)
  - Rekonstruktionsfilter in Digital-Analog-Wandlern
    - » Nur Frequenzen des Original-Frequenzbandes relevant

Filter-Terminologie

- Hochpass:
  - Lässt hohe Frequenzen passieren, blendet tiefe Frequenzen aus
- Tiefpass:
  - Lässt tiefe Frequenzen passieren, blendet hohe Frequenzen aus
- Bandpass:
  - Lässt Frequenzen in einem bestimmten Intervall passieren, blendet höhere oder niedrigere Frequenzen aus
- Filter sind genauer durch *Grenzfrequenzen* beschrieben