

Computergrafik 2: Filtern im Frequenzraum

Prof. Dr. Michael Rohs, Dipl.-Inform. Sven Kratz

michael.rohs@ifi.lmu.de

MHCI Lab, LMU München

Folien teilweise von Andreas Butz, sowie von Klaus D. Tönnies
(Grundlagen der Bildverarbeitung. Pearson Studium, 2005)

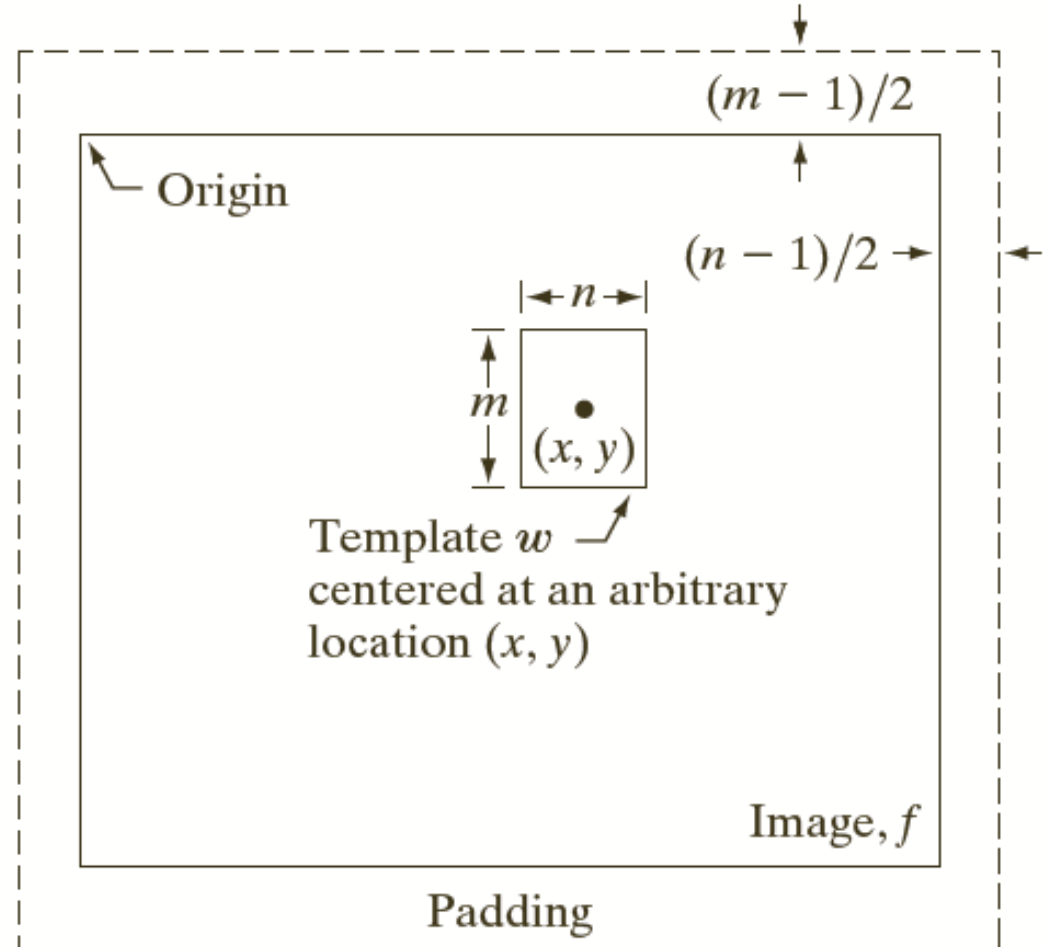
Themen heute

- Korrelation im Frequenzraum
 - Finden von Templates
- Filtern im Frequenzraum
 - Bandreject/Bandpass-Filter
 - Notch-Filter, optimale Notch-Filter
- Dekonvolution
 - inverses Filtern
 - Wiener Filter
- Transformation und Interpolation
- Rauschunterdrückung mit Ähnlichkeitsfilter

KORRELATION IM FREQUENZRAUM

Korrelation im Ortsraum

- Ähnlichkeiten zwischen Bild und Modell feststellen
- Modell (Template) im Bild suchen



© R. C. Gonzalez & R. E. Woods, Digital Image Processing

Korrelation im Ortsraum

- Ähnlichkeitsmaß (normalisierter) Korrelationskoeffizient
 - Mittelwerte subtrahiert und Varianzen normiert
- Kleineres Bild pixelweise über größeres Bild verschieben und Korrelationskoeffizient ausrechnen
(f = Bild, m = Modell/Template, (x,y) = Suchposition)

$$cc_{f,m}(x,y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b (m(s,t) - \bar{m}) (f(x+s, y+t) - \bar{f}(x+s, y+t))}{\sqrt{\left[\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b (m(s,t) - \bar{m})^2 \right] \left[\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b (f(x+s, y+t) - \bar{f}(x+s, y+t))^2 \right]}}$$

$$-1 \leq cc_{f,m}(x,y) \leq 1$$

Korrelation im Frequenzraum

- Subtrahiere Mittelwerte von f und g (bzw. m)
- Ähnlichkeitsmaß: Korrelationskoeffizient $cc_{f,g}$

$$cc_{f,g} = \frac{\sigma_{f,g}}{\sqrt{\sigma_{f,f} \cdot \sigma_{g,g}}} = \frac{\sigma_{f,g}}{\sqrt{\sigma_f^2 \cdot \sigma_g^2}}$$

$$\sigma_{f,g} = \frac{1}{MN} \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{N-1} \left(f(s,t) - \bar{f}(s,t) \right) \left(g(s,t) - \bar{g}(s,t) \right)$$

$$cc_{f,g}(x,y) \approx \frac{1}{MN \sqrt{\sigma_f^2 \cdot \sigma_g^2}} \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{N-1} \left(f(x+s, y+t) - \bar{f}(x+s, y+t) \right) \left(m(s,t) - \bar{m} \right)$$

$$= k \underbrace{\sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{N-1} f(x+s, y+t) \cdot m(s,t)}_{\text{Korrelationsfunktion}} \implies FT \left([f \circ g](x,y) \right) = F(u,v) \cdot G^*(u,v)$$

Korrelation
G konjugiert

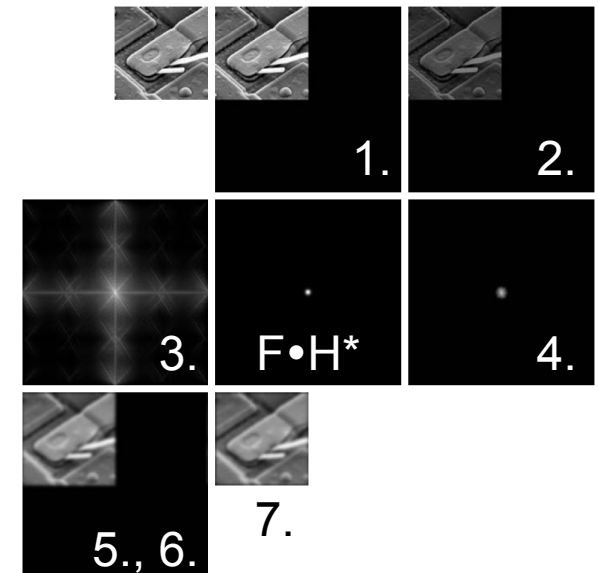
Korrelation im Frequenzraum

- Statt Korrelation im Ortsraum nun Multiplikation mit konjugiert komplexem Modell im Frequenzraum

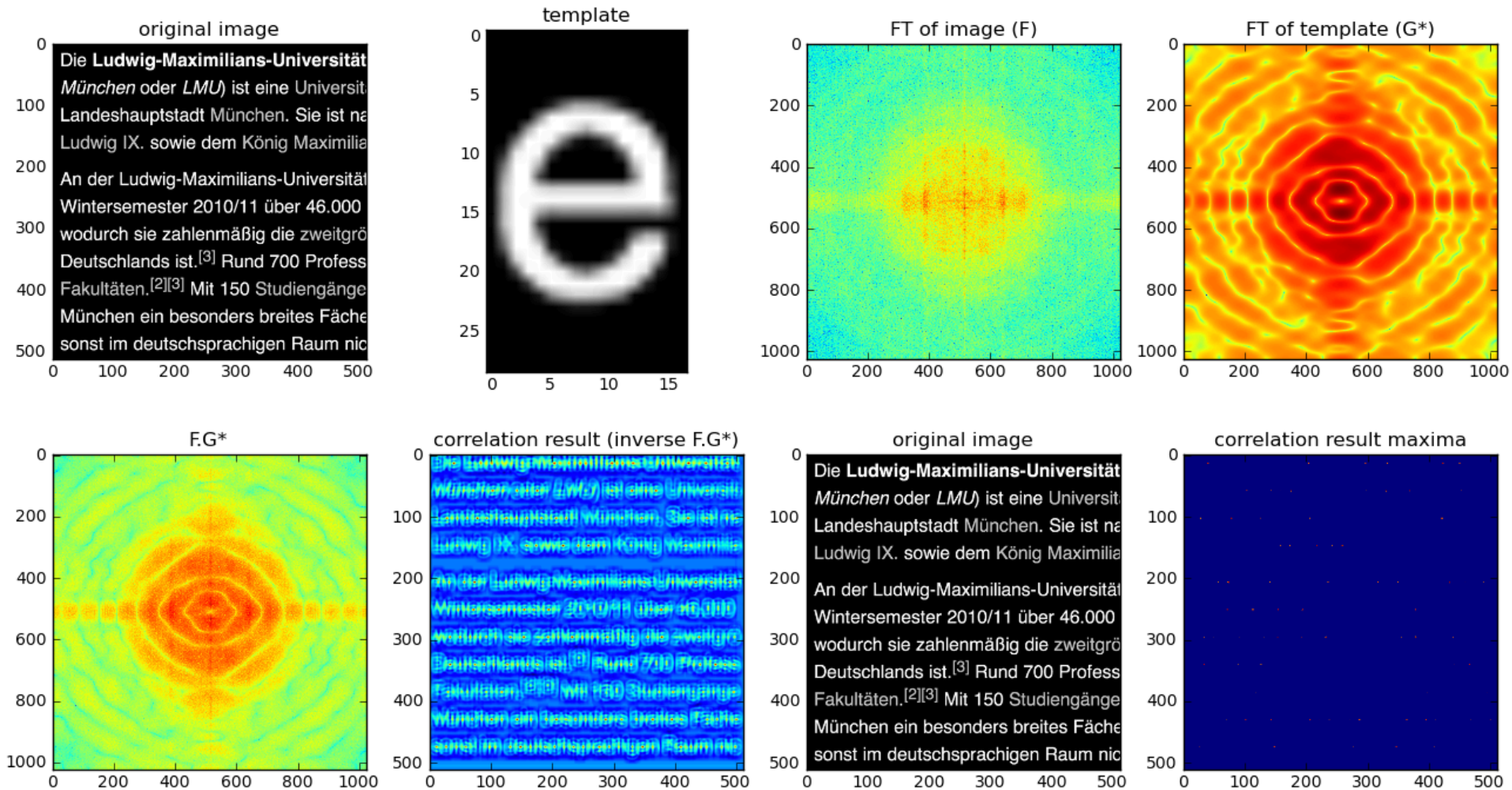
$$f(x, y) \circ h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot h(x+m, y+n) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot H^*(u, v)$$

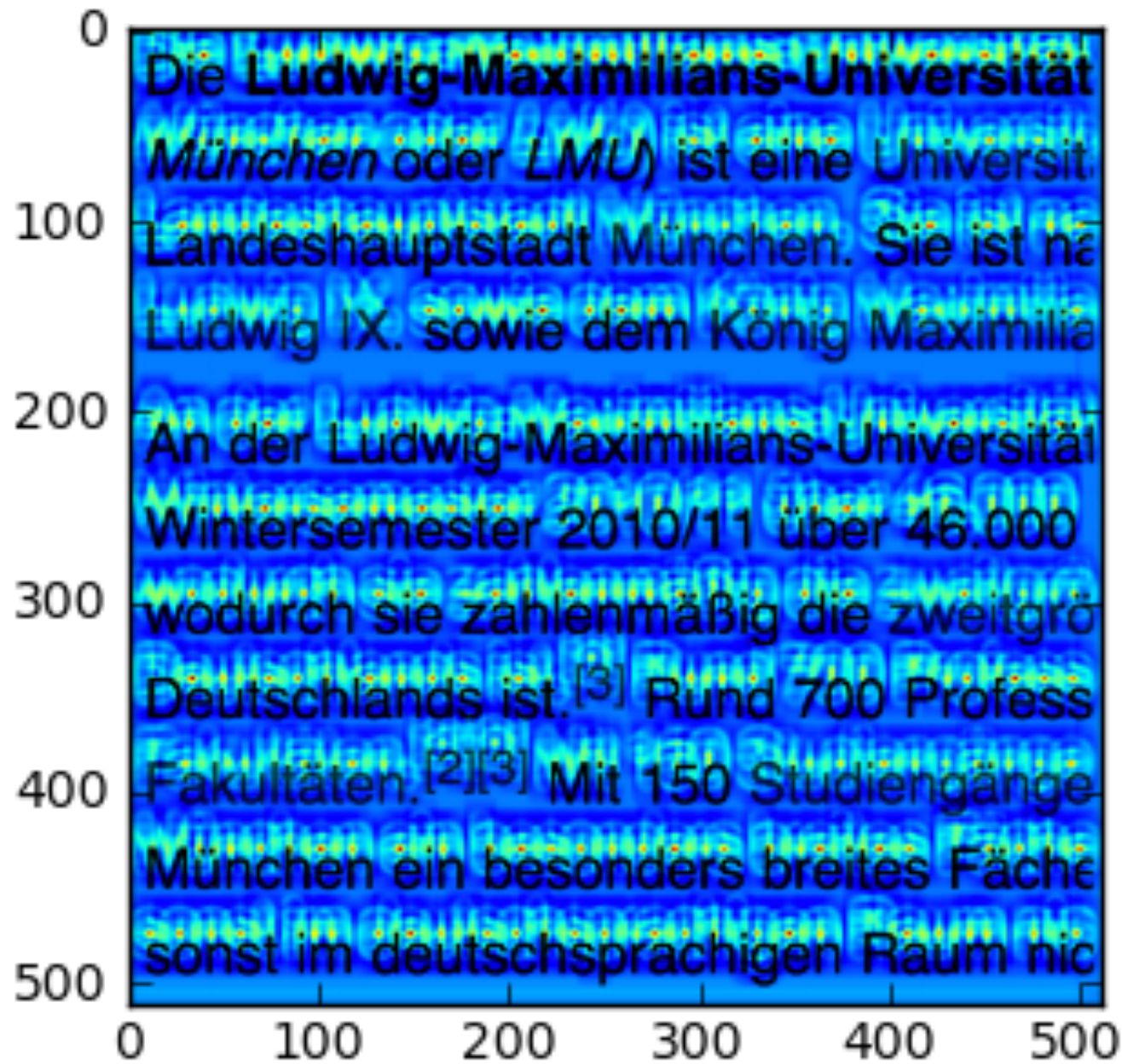
- Vorgehen

1. Mittelwerte abziehen
2. Padding im Ortsraum auf $2M, 2N$
3. Multiplikation mit $(-1)^{x+y}$
4. DFT
5. Multiplikation mit H^* im Frequenzraum
6. inverse DFT, Realteil
7. Multiplikation mit $(-1)^{x+y}$
8. Padding entfernen



Korrelation im Frequenzraum

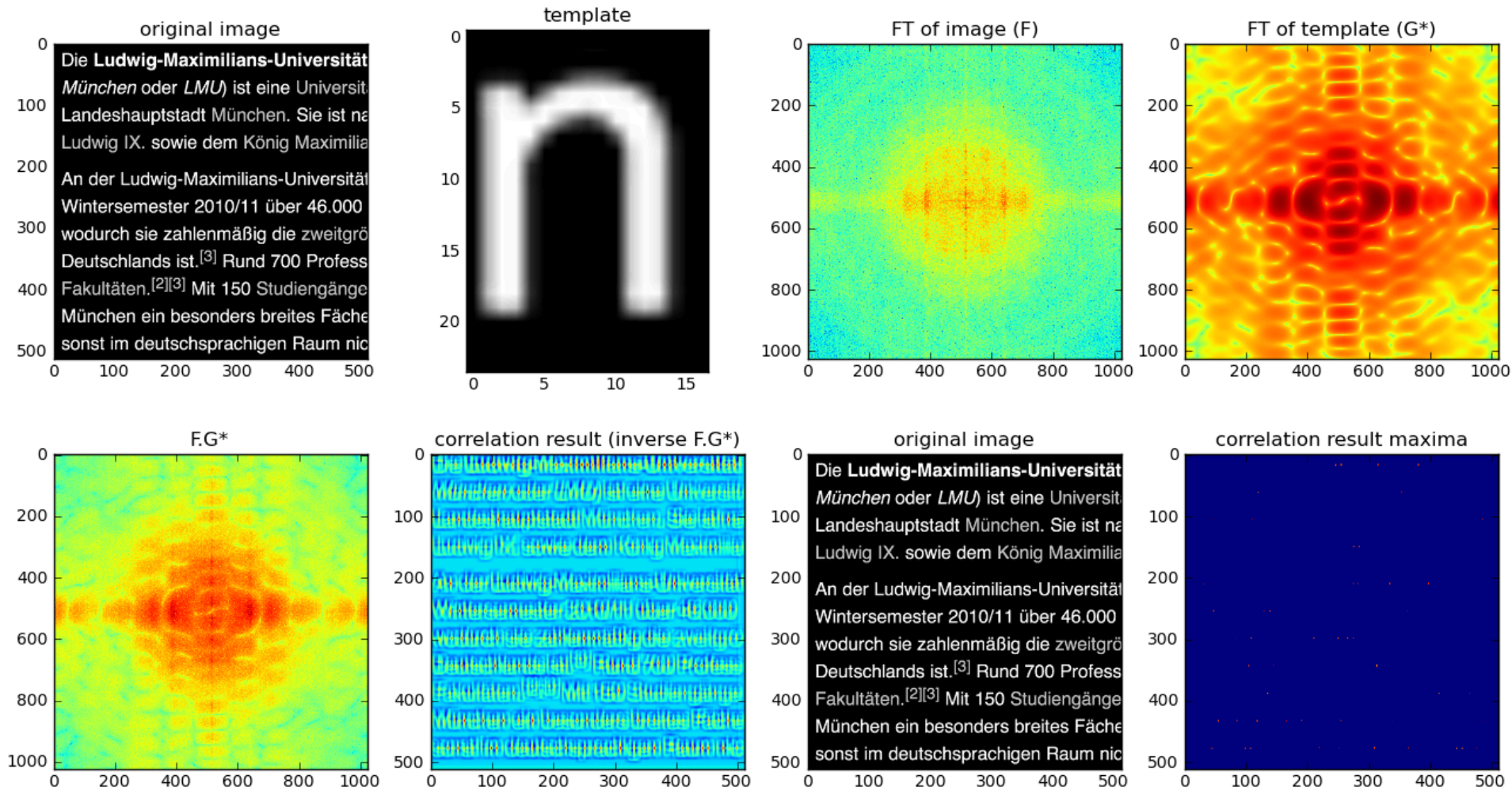


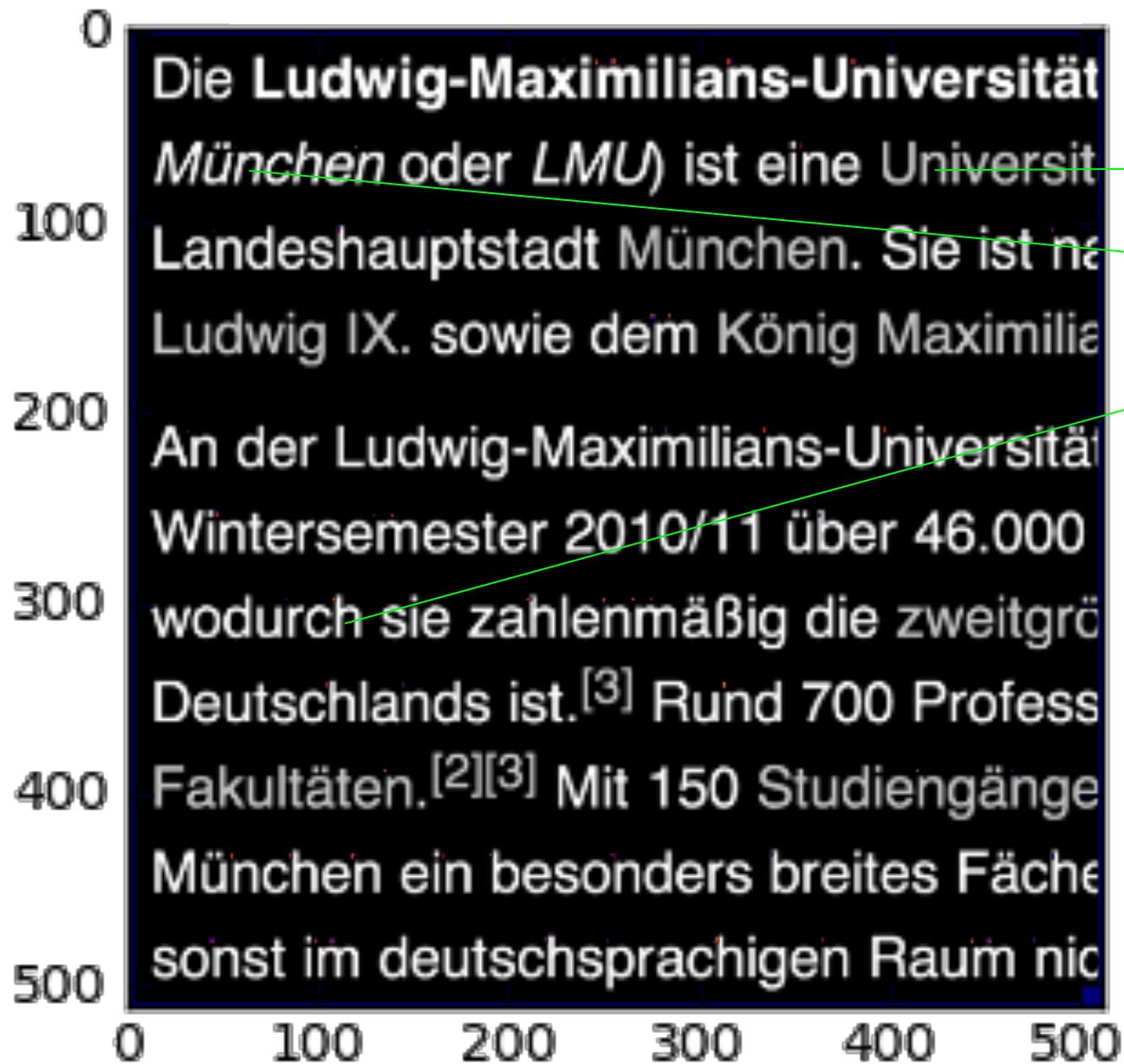


Die **Ludwig-Maximilians-Universität München** oder *LMU*) ist eine Universität in der bayerischen Landeshauptstadt München. Sie ist nach dem bayerischen König Ludwig IX. sowie dem König Maximilian I. benannt.

An der Ludwig-Maximilians-Universität München wurden im Wintersemester 2010/11 über 46.000 Studierende immatrikuliert, wodurch sie zahlenmäßig die zweitgrößte Universität Deutschlands ist.^[3] Rund 700 Professoren lehren an 15 Fakultäten.^{[2][3]} Mit 150 Studiengängen ist München ein besonders breites Fächerangebot, das sonst im deutschsprachigen Raum nicht zu finden ist.

Korrelation im Frequenzraum





grau

kursiv

match, falls Teile
vorhanden

Grenzen des Korrelations-Matching

- Abhängigkeit von
 - Skalierung
 - Rotation
 - Perspektive
- später in der Vorlesung leistungsfähigere Verfahren

Bandreject/Bandpass-Filter

Notch-Filter

Bandreject-Filter

- Nützlich, wenn Störungen in einem bestimmten Frequenzband konzentriert sind
- Selektive Bandreject-Filter können solche Störungen reduzieren



FIGURE 5.15 From left to right, perspective plots of ideal, Butterworth (of order 1), and Gaussian bandreject filters.

Bandreject/Bandpass-Filter

- Bandreject-Filter

- Ideal
$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

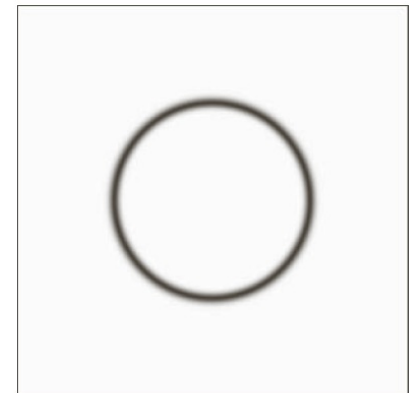
- Butterworth
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right)^{2n}}$$

- Gauß
$$H(u, v) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{D^2 - D_0^2}{DW}\right)^2\right)$$

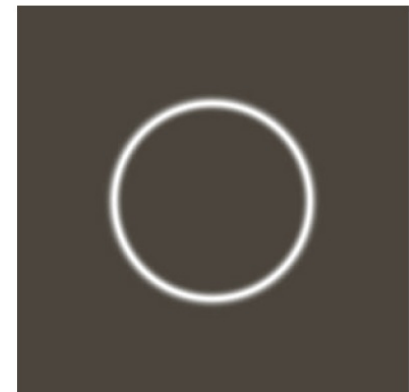
- Bandpass-Filter

$$H_{BP}(u, v) = 1 - H_{BR}(u, v)$$

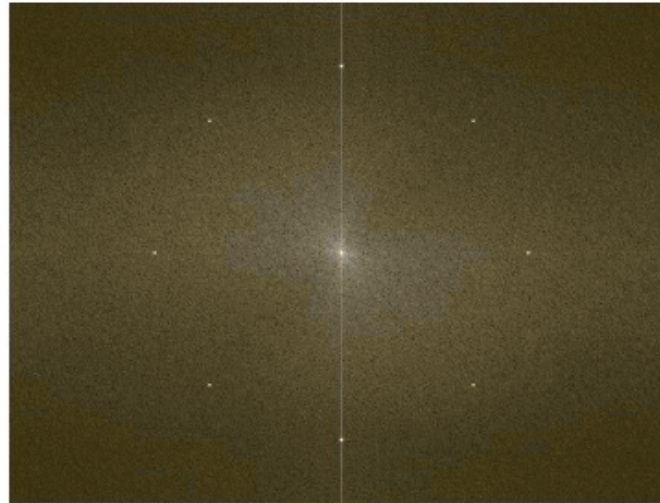
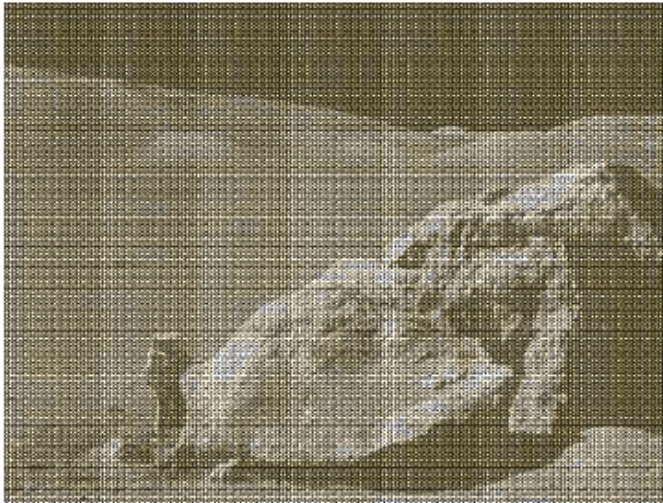
Gauß-
Bandreject-
Filter



Gauß-
Bandpass-
Filter



Beispiel: Artefakte entfernen



a	b
c	d

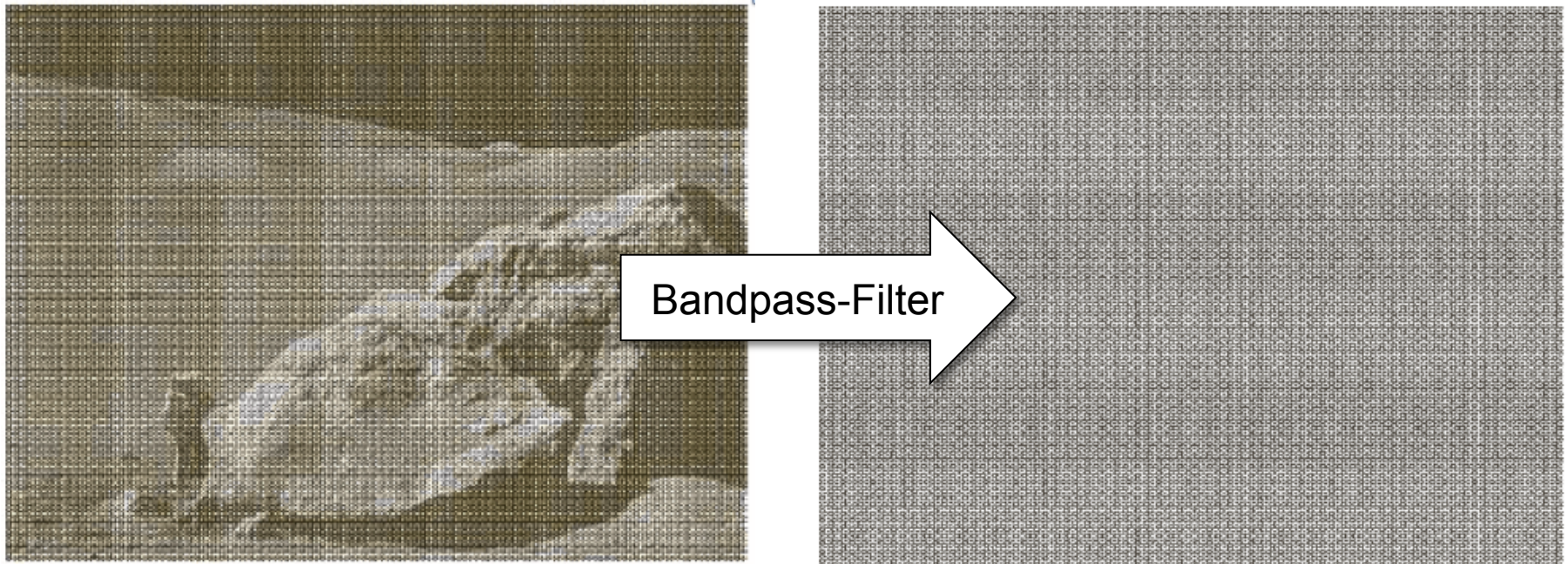
FIGURE 2.40

(a) Image corrupted by sinusoidal interference. (b) Magnitude of the Fourier transform showing the bursts of energy responsible for the interference. (c) Mask used to eliminate the energy bursts. (d) Result of computing the inverse of the modified Fourier transform. (Original image courtesy of NASA.)



Beispiel: Artefakte entfernen

- Bandpassfilter isoliert Artefakt



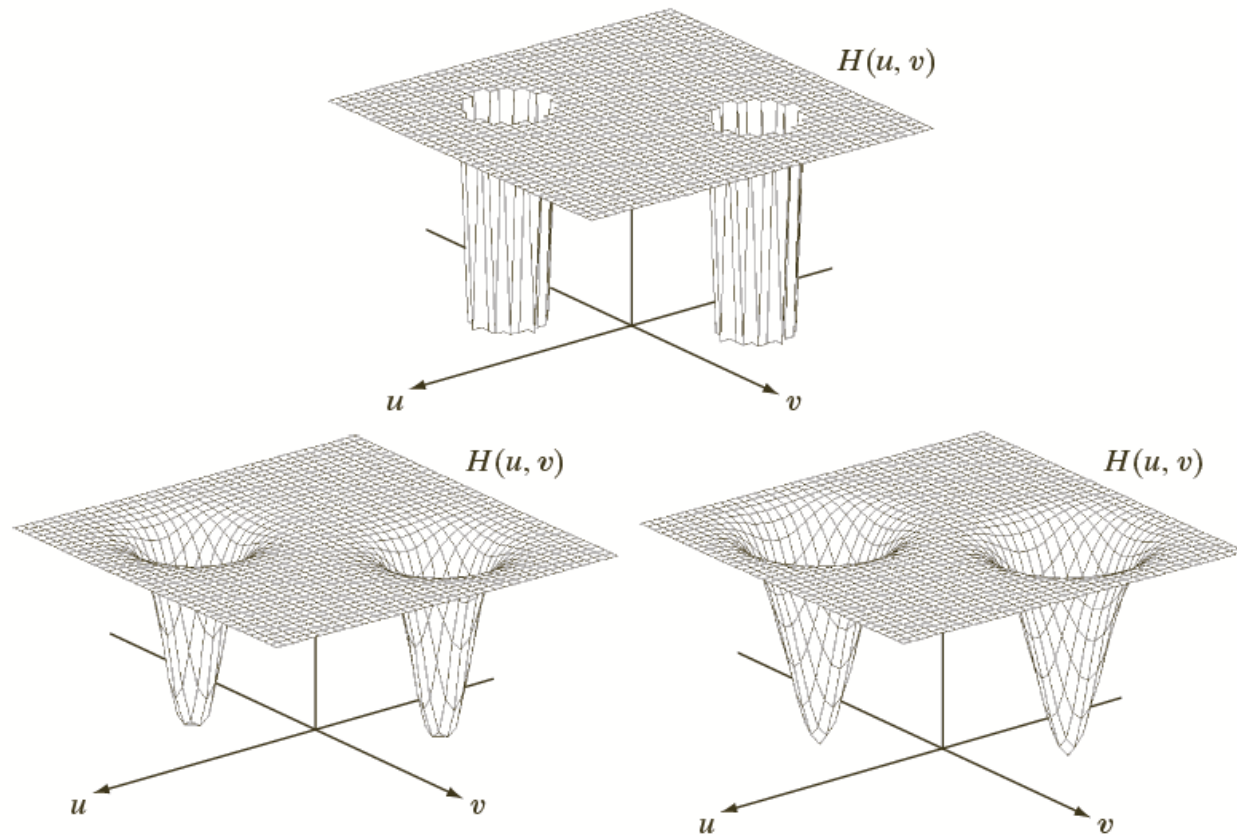
Notch-Filter

- Filtert in einer bestimmten Umgebung
- Symmetrisch zum Ursprung

a
b c

FIGURE 5.18

Perspective plots of (a) ideal, (b) Butterworth (of order 2), and (c) Gaussian notch (reject) filters.



© R. C. Gonzalez & R. E. Woods, Digital Image Processing

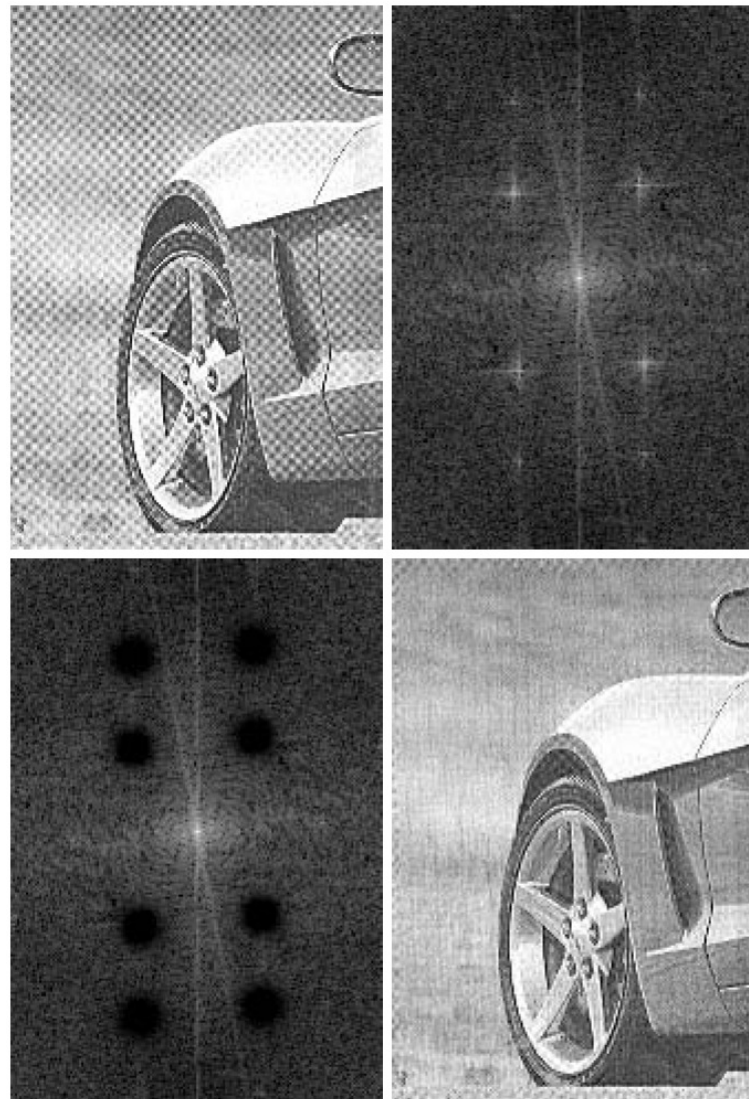
Notch-Filter

- Filtert in einer bestimmten Umgebung (u_0, v_0)
- Müssen symmetrisch zum Ursprung sein
 - wenn Zentrum (u_0, v_0) , dann auch $(-u_0, -v_0)$
 - sonst verändert sich die Phase
- Gebildet aus Produkt von Hochpass-Filtern

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) \cdot H_{-k}(u, v)$$

- wobei $H_k(u, v)$ und $H_{-k}(u, v)$ ihre Zentren bei (u_k, v_k) bzw. $(-u_k, -v_k)$ haben; Distanzen relativ zu diesen Zentren
 - Notch-Pass-Filter
- $$H_{NP}(u, v) = 1 - H_{NR}(u, v)$$

Beispiel: Reduzierung Moiré-Muster



a	b
c	d

FIGURE 4.64

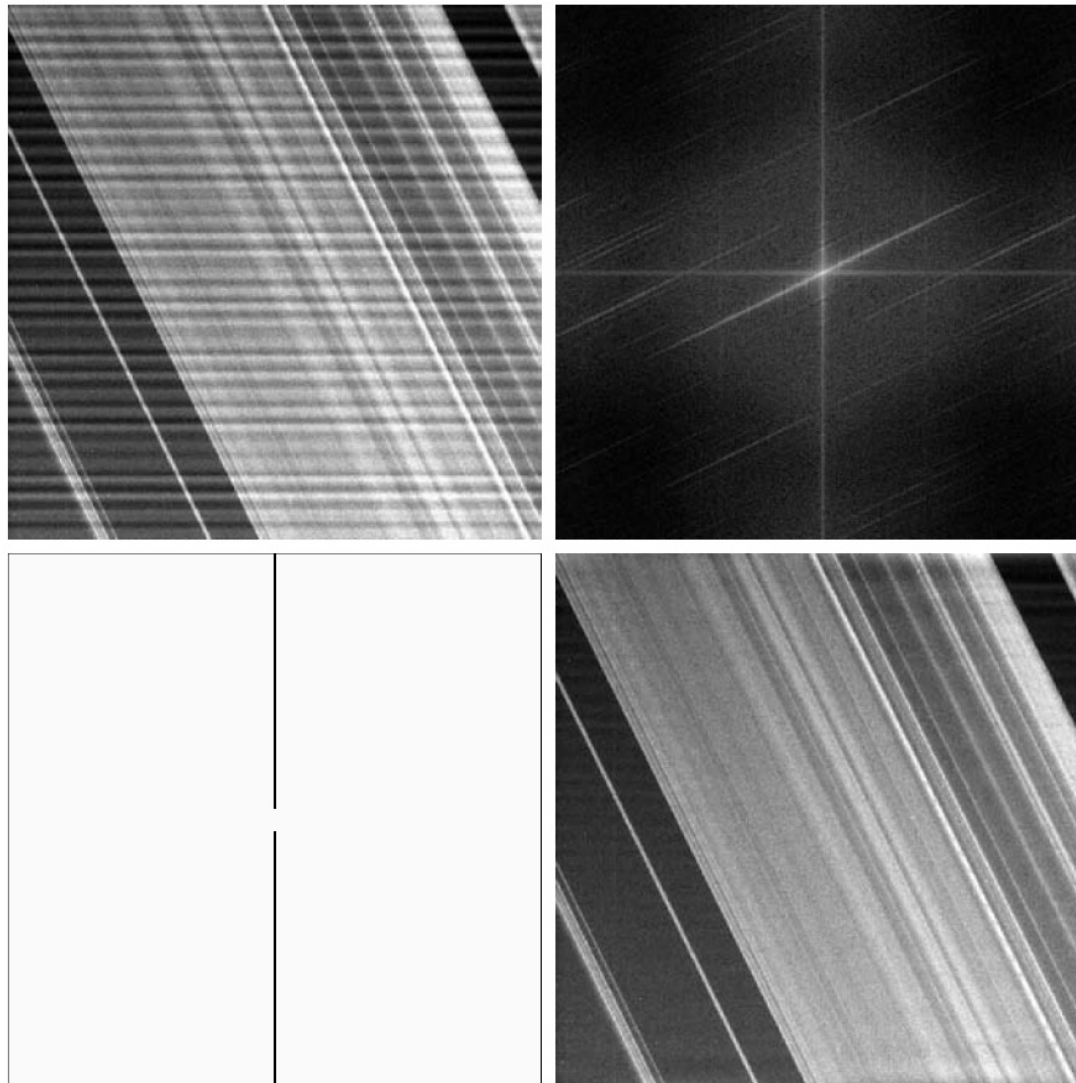
(a) Sampled newspaper image showing a moiré pattern.

(b) Spectrum.

(c) Butterworth notch reject filter multiplied by the Fourier transform.

(d) Filtered image.

Beispiel: Reduzierung Interferenzmuster

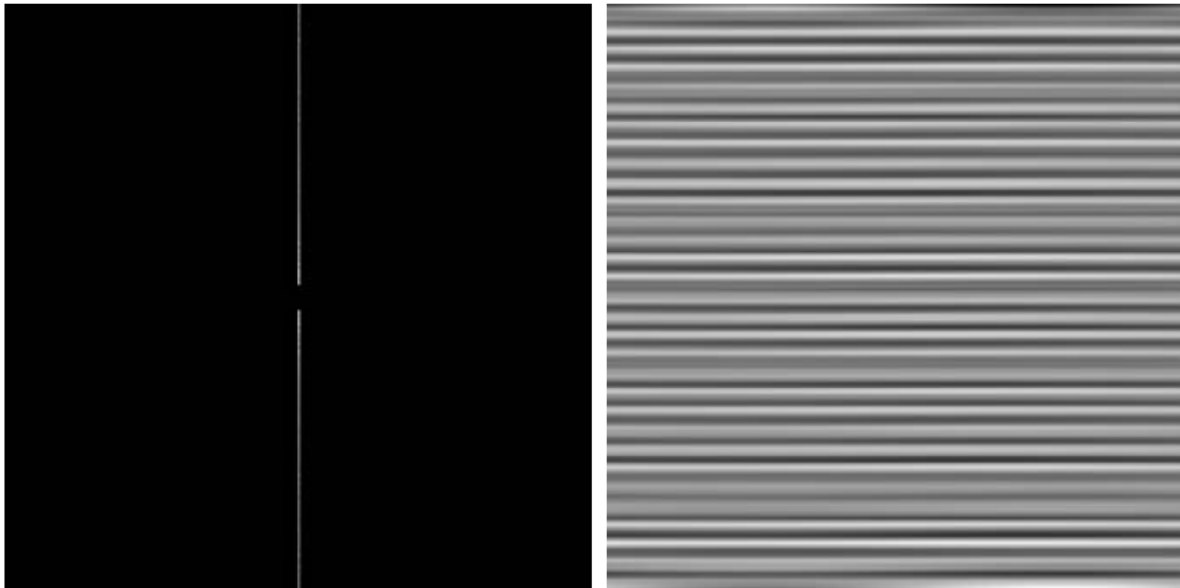


a	b
c	d

FIGURE 4.65
(a) 674×674 image of the Saturn rings showing nearly periodic interference. (b) Spectrum: The bursts of energy in the vertical axis near the origin correspond to the interference pattern. (c) A vertical notch reject filter. (d) Result of filtering. The thin black border in (c) was added for clarity; it is not part of the data. (Original image courtesy of Dr. Robert A. West, NASA/JPL.)

Beispiel: Reduzierung Interferenzmuster

- Notch-Pass-Filter isoliert Interferenzmuster



a b

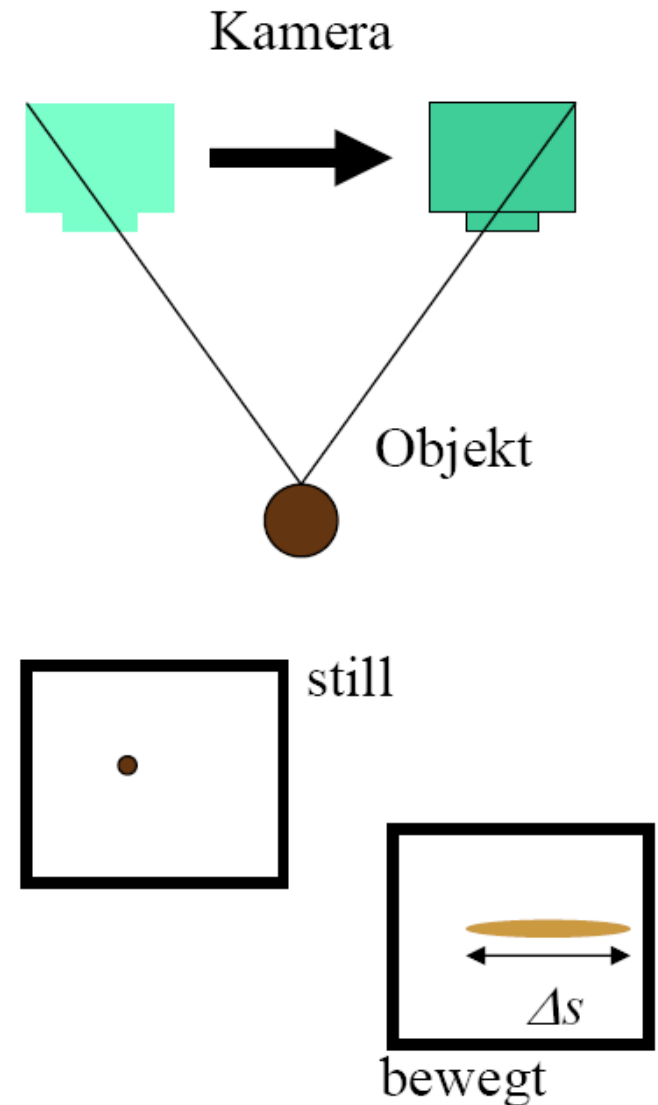
FIGURE 4.66

(a) Result (spectrum) of applying a notch pass filter to the DFT of Fig. 4.65(a).
(b) Spatial pattern obtained by computing the IDFT of (a).

RESTAURATION LINEARER BILDSTÖRUNGEN

Beispiel I: Bewegungsunschärfe

- Über einen Zeitraum Δt wird ein Objektpunkt p auf immer andere Punkte auf dem CCD-Chip abgebildet.
- Bei unbewegter Kamera sei die Bildhelligkeit des abgebildeten Punkts h .
- Dann ist sie bei bewegter Kamera $h/\Delta s$, wobei Δs die zurückgelegte Strecke ist.
- Wenn Δs für alle Punkte gleich ist, dann lässt sich die Veränderung durch eine Faltung beschreiben.



Bewegungsunschärfe

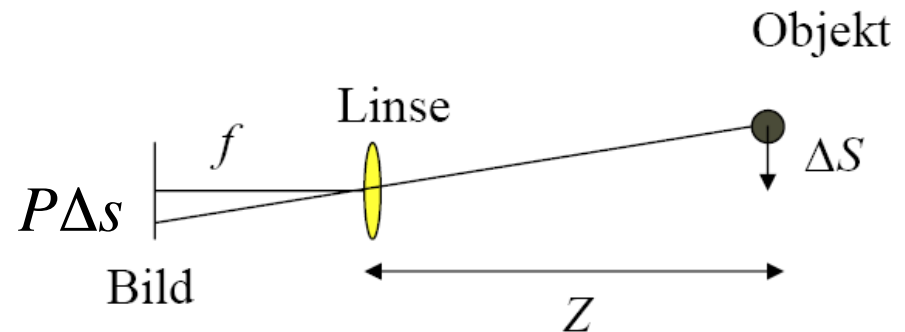
- Faltungskern ist eine Funktion w mit

$$w(t \cdot \cos \alpha, t \cdot \sin \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta s} & |t| < \frac{\Delta s}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

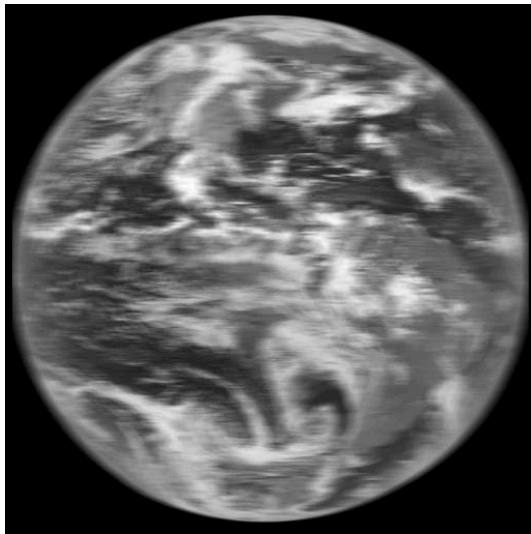
- Der Winkel α gibt die Bewegungsrichtung an.
- Die Strecke $P\Delta s$ gibt die Strecke an, um die sich der Punkt bewegt hat:

$$\Delta s = \frac{f}{Z} \cdot \frac{\Delta S}{p}$$

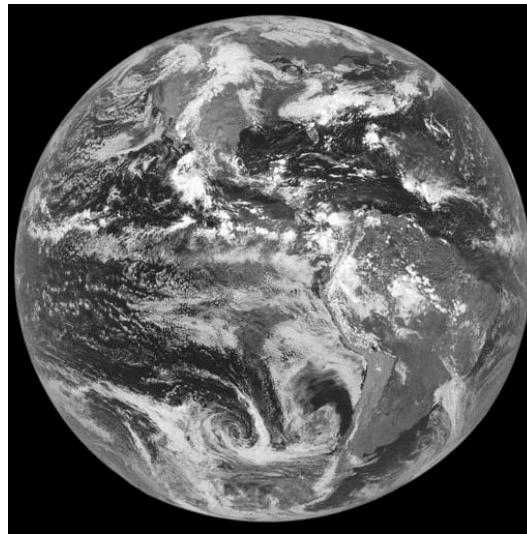
- f : Brennweite
- Z : Objektabstand
- ΔS : Bewegung in der X - Y -Ebene
- P : Pixelgröße



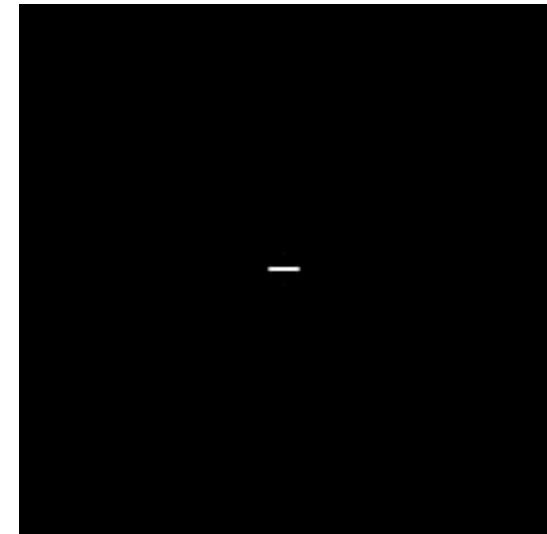
Bewegungsunschärfe



=



*



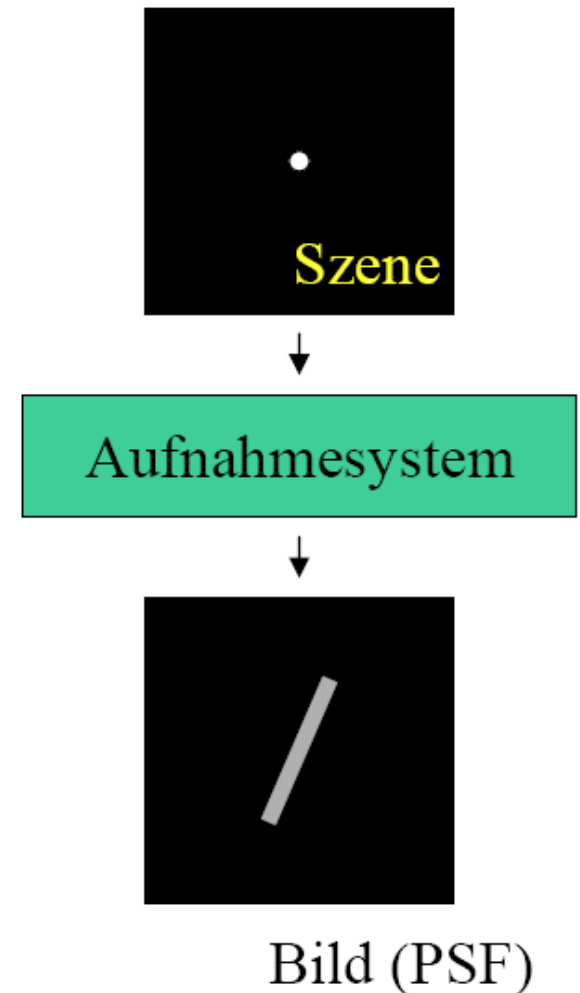
Gestörtes Bild

Original

Faltungskern

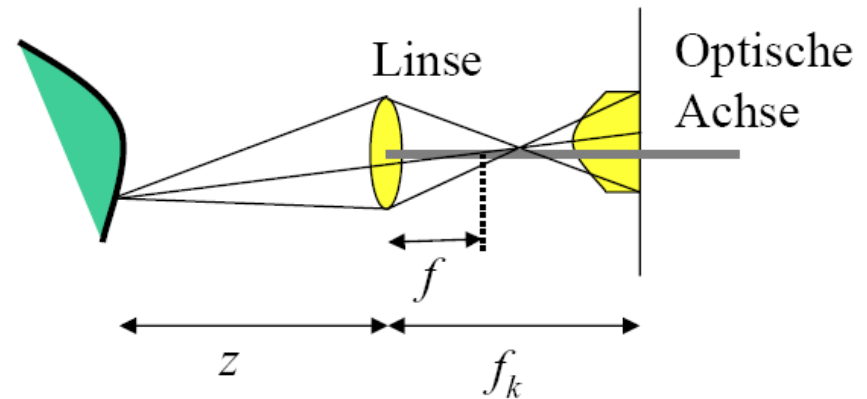
Repräsentation linearer Störungen

- Jede verschiebungsinvariante lineare Operation wird vollständig durch die Faltungsfunktion beschrieben.
- Die Faltungsfunktion beschreibt die Operation für beliebige Bilder
- Die Faltungsfunktion kann als Resultat der Veränderung eines Punkts erzeugt werden
- Punktantwort = Point Spread Function (PSF)



Beispiel II: Fokussierungsunschärfe

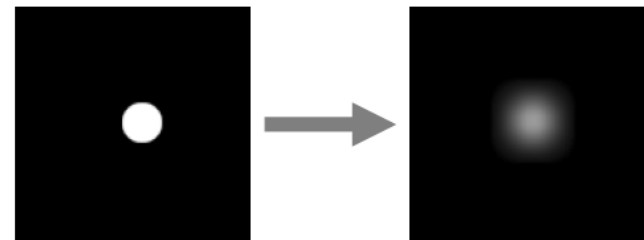
- Maß der Unschärfe hängt vom Punktabstand z , der Brennweite der Linse f und der Kammerkonstante f_k ab.



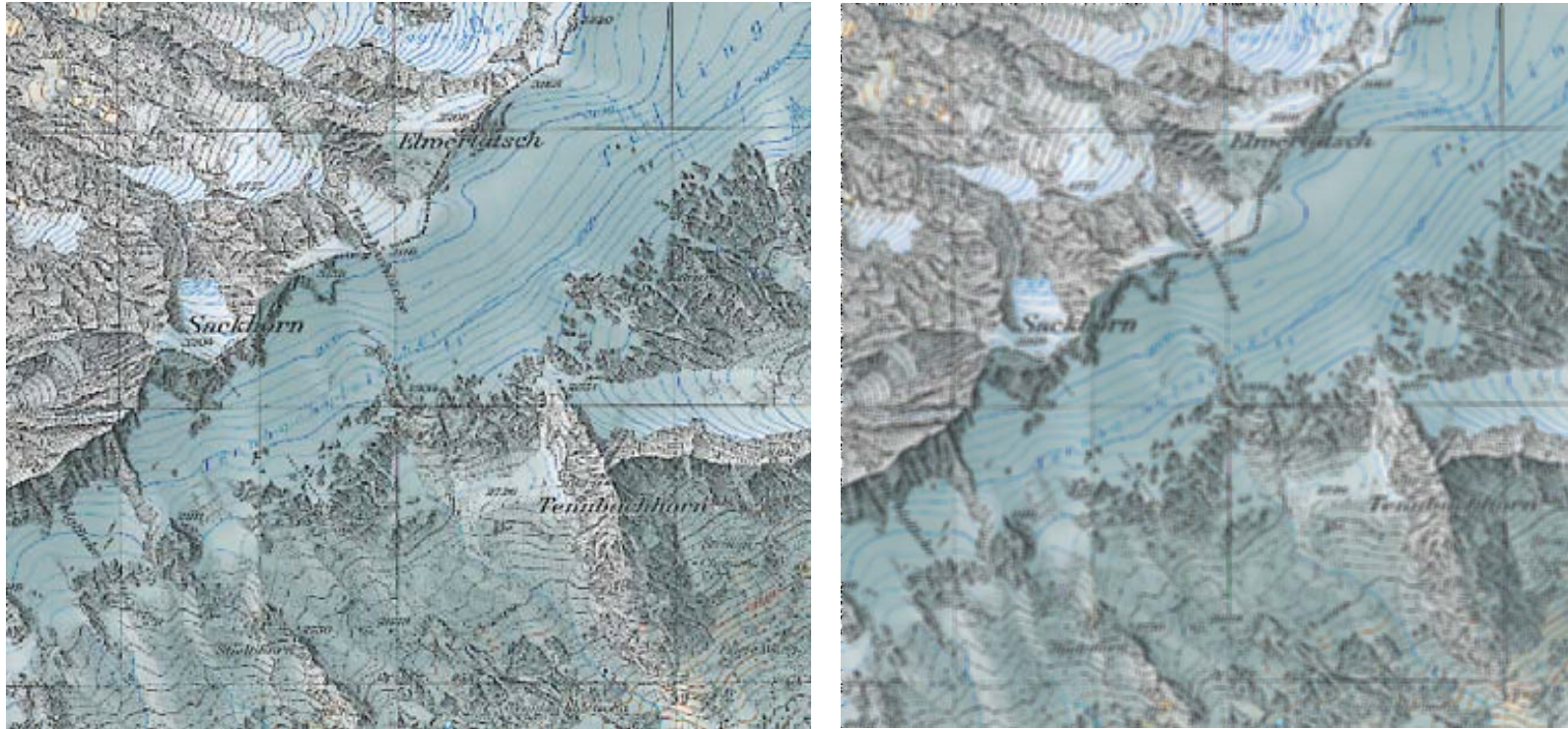
- Linsengesetz:
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_k} \Leftrightarrow f_k = \frac{zf}{f - z}$$

- Größe des Unschärfekreises:
$$\frac{d}{f} = \frac{s}{f_k} \Leftrightarrow s = \frac{f_k d}{f} = \frac{zd}{f - z}$$

- Unschärfe kann durch Aufnahme eines punktförmigen Testobjekts angenähert werden.



Fokussierungsunschärfe

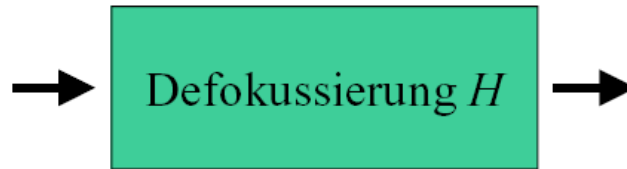


Wie kann die Störung rückgängig gemacht werden?

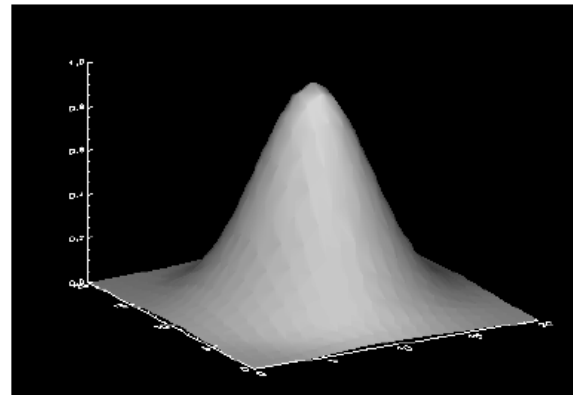
Bildrestauration

- Ziel: Korrektur des Bildsignals um bekannte und unbekannte Störungen
- Annahme: Störung kann durch einen verschiebungsinvarianten linearen Operator h beschrieben werden
- $g(x,y) \rightarrow$ (Störung durch PSF h) $\rightarrow g'(x,y)$
- $g'(x,y) = [h * g](x,y)$
- PSF beschreibt die Störung \rightarrow Wie kann die PSF bestimmt werden?

Gesucht: PSF

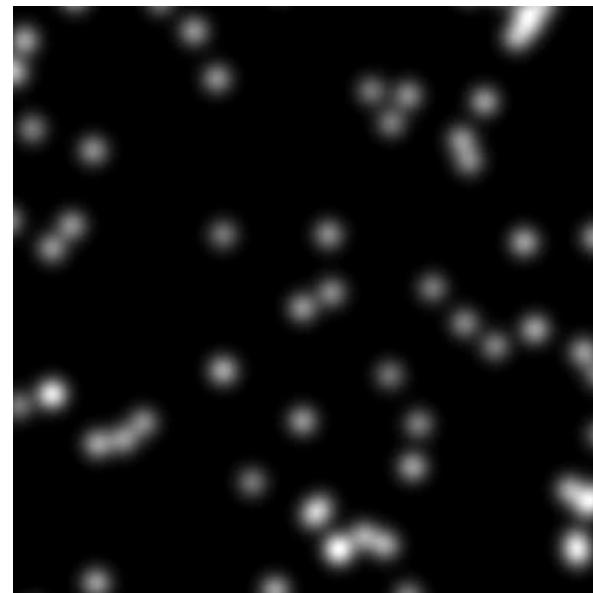


Gesucht:



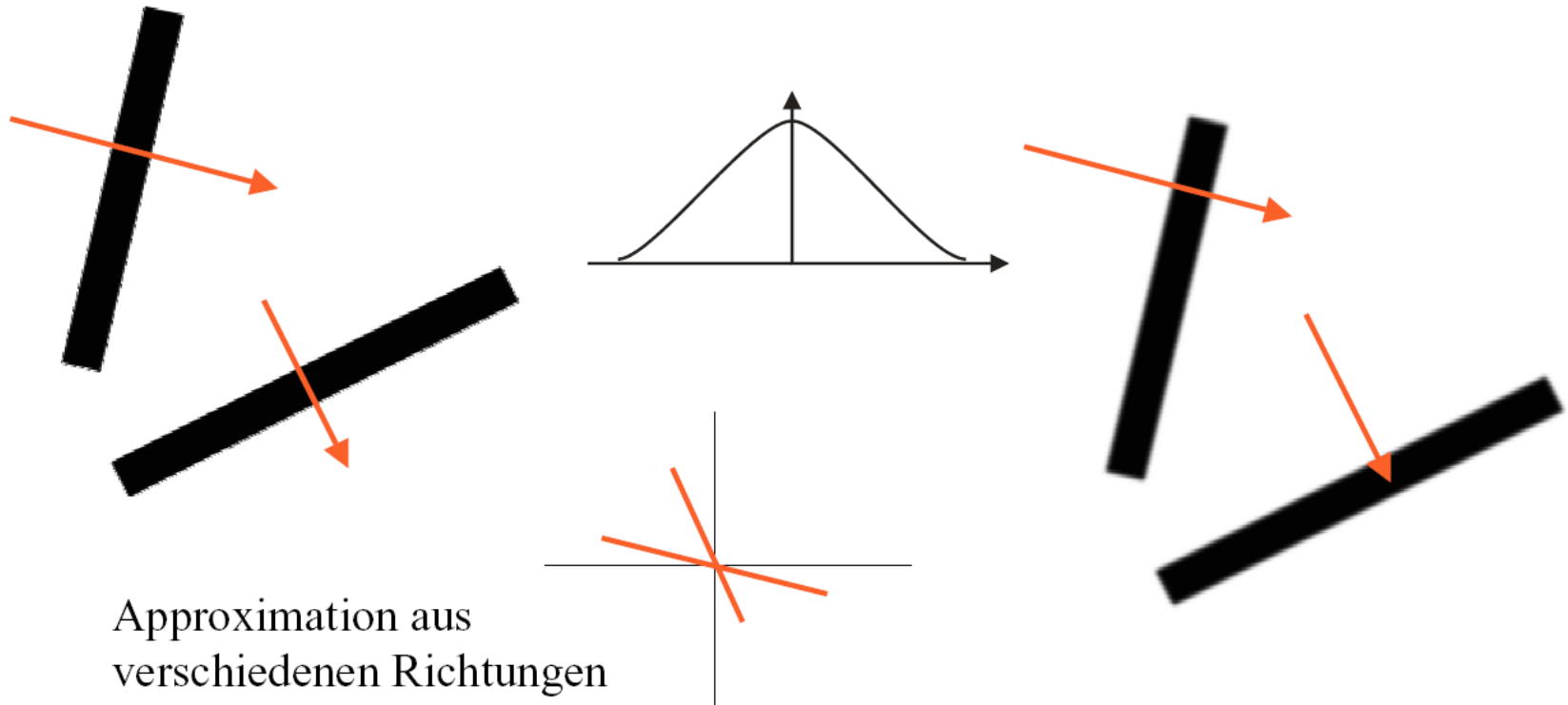
PSF

PSF von Testbildern



- Annahme: Störung konstant und Testaufnahme möglich
- Durch die Aufnahme eines punktförmigen Objekts kann ein δ -Impuls approximiert werden
- Aufnahme ist eine Näherung für die PSF

PSF aus dem aufgenommenen Bild



- Falls Testaufnahme nicht möglich: Näherungsweise Bestimmung der PSF durch Betrachtung von Punkten oder Linien im gestörten Bild

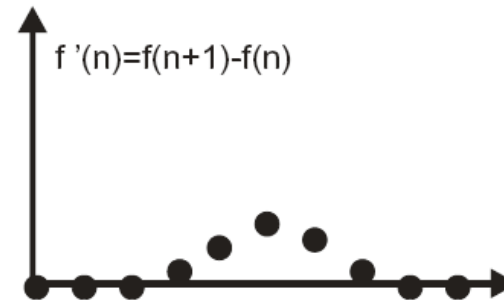
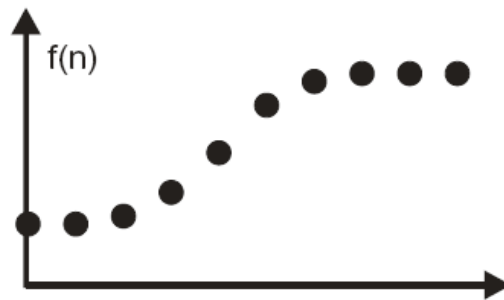
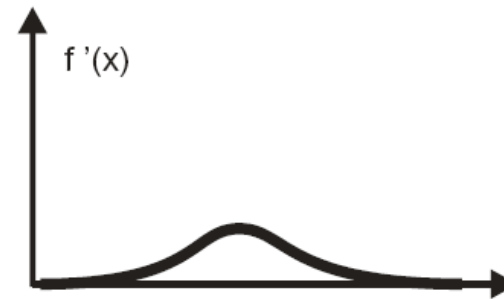
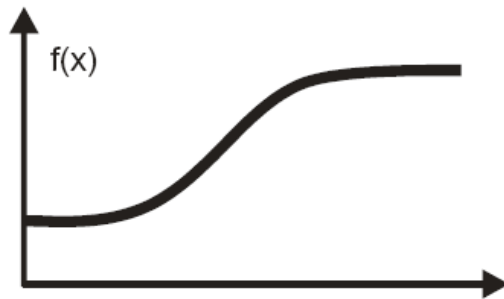
Kanten

- Die meisten Bilder weisen wenige Linien oder Punkte auf, aber Kanten können in fast jedem Bild gefunden werden.

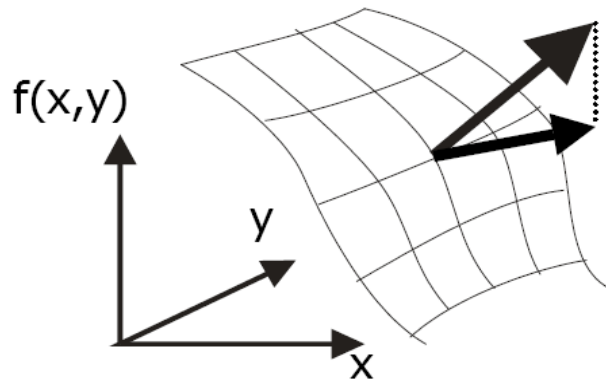


1D-Kanten

- Die **Stärke einer Kante** hängt von der Steigung der Funktion ab: Betrag der ersten Ableitung bestimmen
- Für **diskrete Funktionen**: Ableitung wird durch Differenz angenähert



Kanten im 2D-Raum: Gradienten

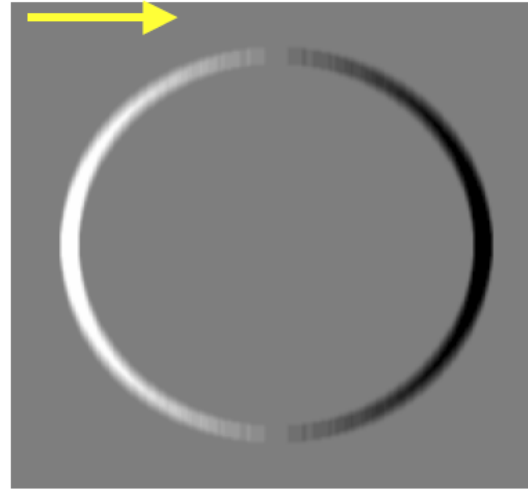


Richtung: Richtung der größten Steigung.

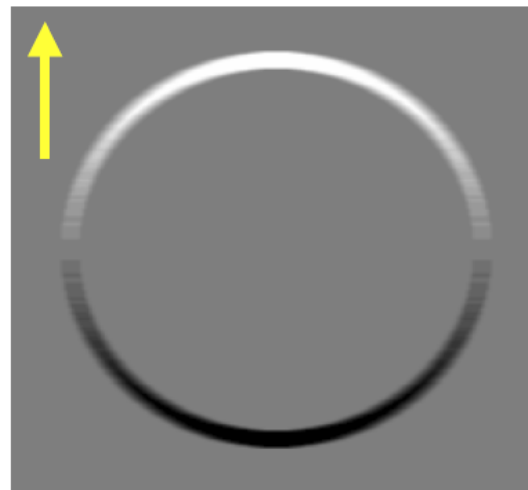
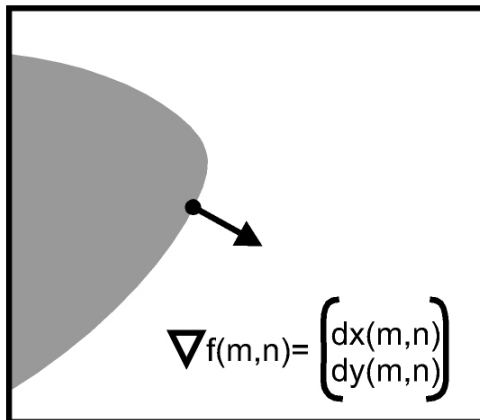
Länge: Stärke der stärksten Steigung.

- Gradient im kontinuierlichen Raum (x, y) : Vektor der partiellen Ableitungen der Bildfunktion in x - und y -Richtung:
 $(f(x, y)) = (\partial f / \partial x \quad \partial f / \partial y)$
- Approximation des Gradienten: Differential wird durch Differenz approximiert:
 $\vec{G}(f)(m, n) \approx [G_x(m, n) \quad G_y(m, n)] = [f(m, n) - f(m-1, n) \quad f(m, n) - f(m, n-1)]$
- Die Länge des Gradienten ist sein Betrag $|G(f)|$ oder näherungsweise $|G_x| + |G_y|$.

Elemente des Gradienten

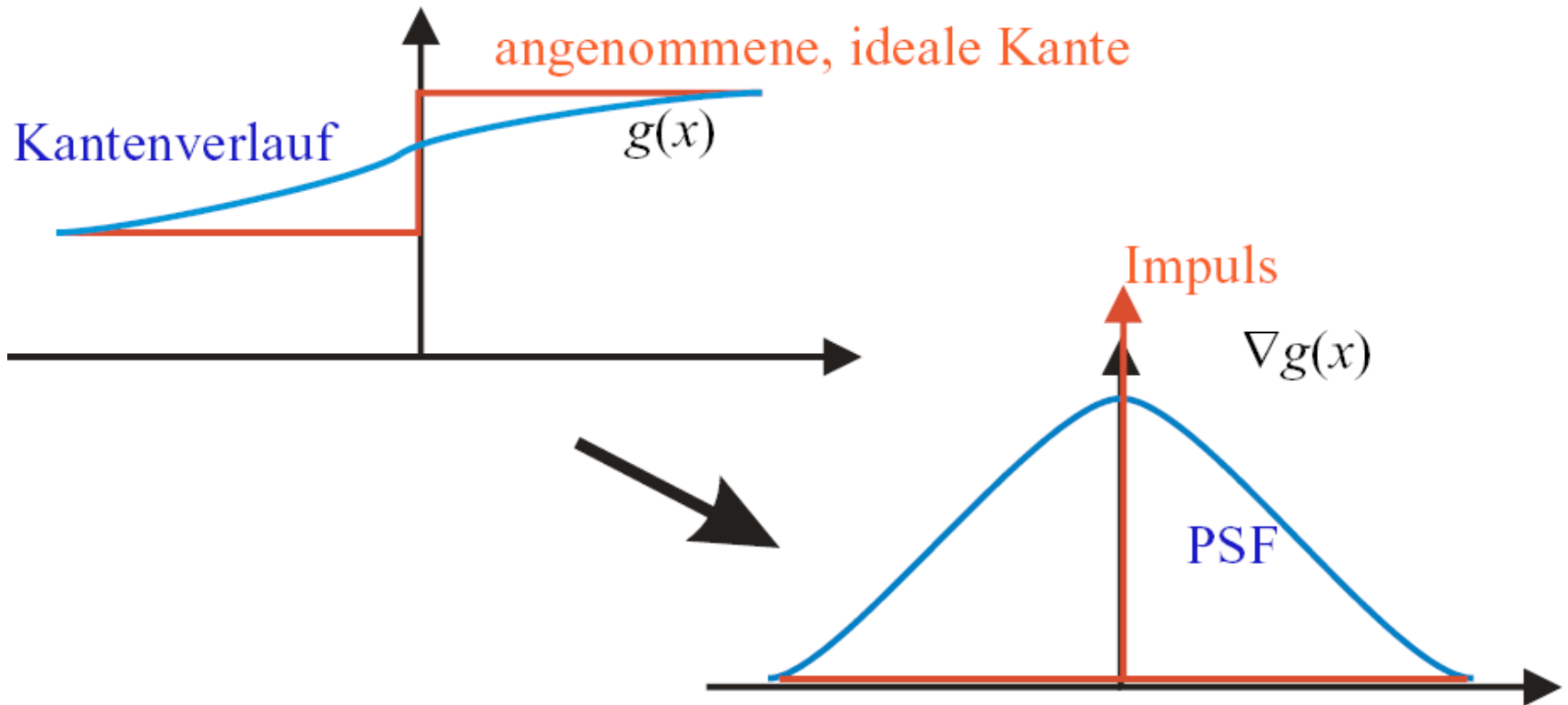


Betrag: $\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$
Richtung: $\tan^{-1}(G_y / G_x)$



PSF aus Kanten

- PSF kann aus dem Verlauf einer als ideal angenommenen Kante approximiert werden



Invertierung der Störung

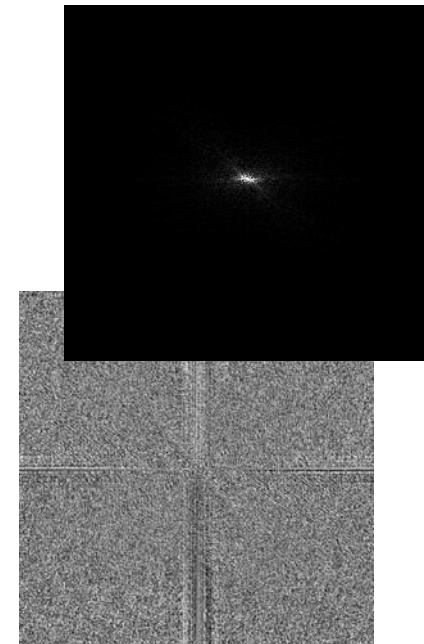
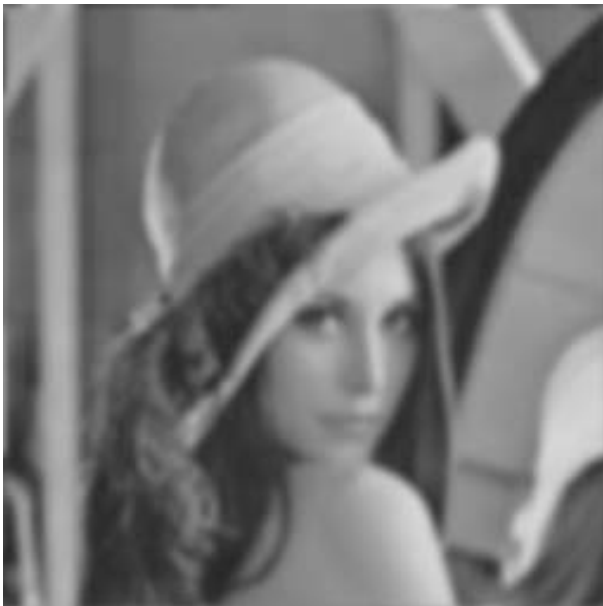
- Überführung der Repräsentation in den Frequenzraum:

$$G'(u,v) = FT[g'(m,n)] = FT[[h*g](m,n)] = H(u,v) \cdot G(u,v)$$

- Invertierung:

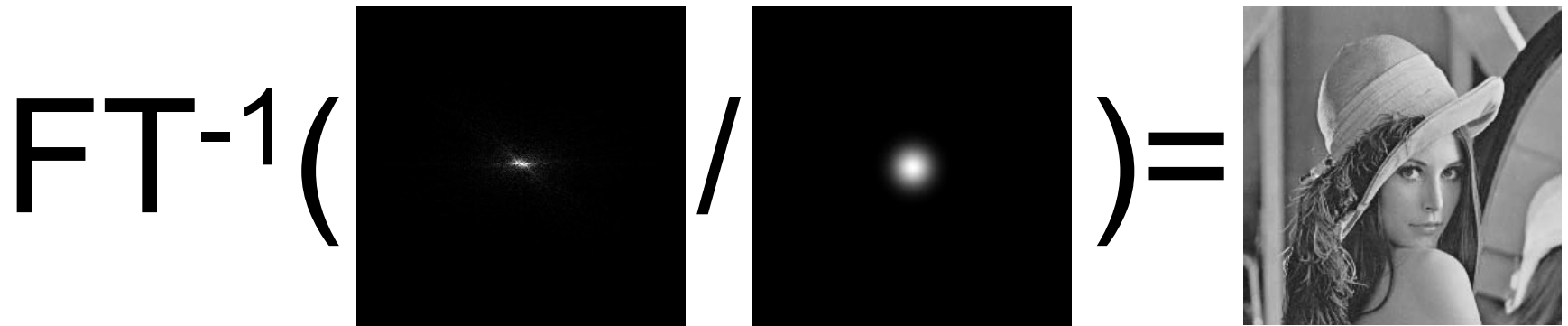
$$g(m,n) = FT^{-1}[G'(u,v)/H(u,v)]$$

← Inverse Filterung

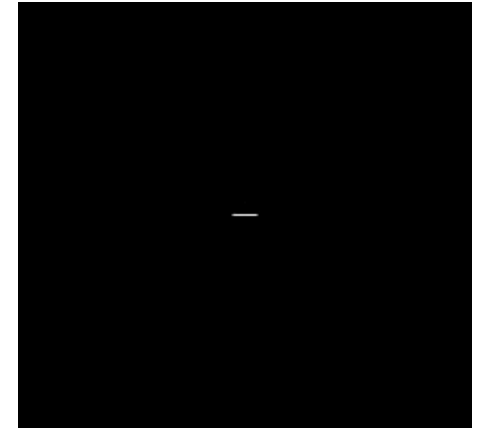


Inverse Filterung

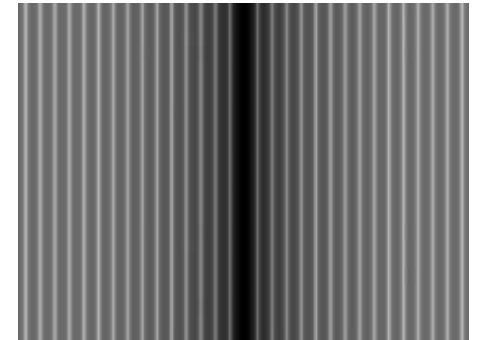
- Vollständige Rückgewinnung der Information aus den gestörten Daten

$$FT^{-1} \left(\frac{\text{[Distorted Image Spectrum]}}{\text{[Filter Spectrum]}} \right) = \text{[Original Image]}$$
The diagram illustrates the process of inverse filtering. It features the mathematical expression $FT^{-1} \left(\frac{\text{[Distorted Image Spectrum]}}{\text{[Filter Spectrum]}} \right) = \text{[Original Image]}$. The first square in the fraction represents the distorted image spectrum, showing a central bright spot with a surrounding diffuse glow. The second square represents the filter spectrum, which is a smooth, bell-shaped curve centered on the same spot. The result of the division is the original image, a grayscale photograph of a woman wearing a hat.

Bewegungsunschärfe



PSF



FT(PSF)

Bewegungsunschärfe

- Resultat der inversen Filterung
 $FT^{-1}[FT(g')(u,v)/FT(PSF)(u,v)]$



Numerische Probleme bei der inversen Filterung

$$g = h * f \Rightarrow f(m, n) = FT^{-1} \left(\frac{G(u, v)}{H(u, v)} \right)$$

- Problem: Nullstellen von H
 - Treten auf, falls h als Matrix nicht den vollen Rang hat
 - Auch kleine Werte von H sind numerisch schon ein Problem
- Deswegen in der Praxis:

$$F(u, v) = \begin{cases} \frac{G(u, v)}{H(u, v)} & H(u, v) > H_{\min} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Rauschen

- Problem: Inverse Filterung geht von idealen (ungestörten) Daten aus
- aber: Bilddaten enthalten Rauschen
- inverse Filterung verstärkt Rauschen extrem
 - mit steigender Frequenz: (weißes) Rauschen bleibt, Signal-Amplitude nimmt schnell ab, Rauschanteil wird höher

$$g(m, n) = f(m, n) * h(m, n) + \eta(m, n)$$

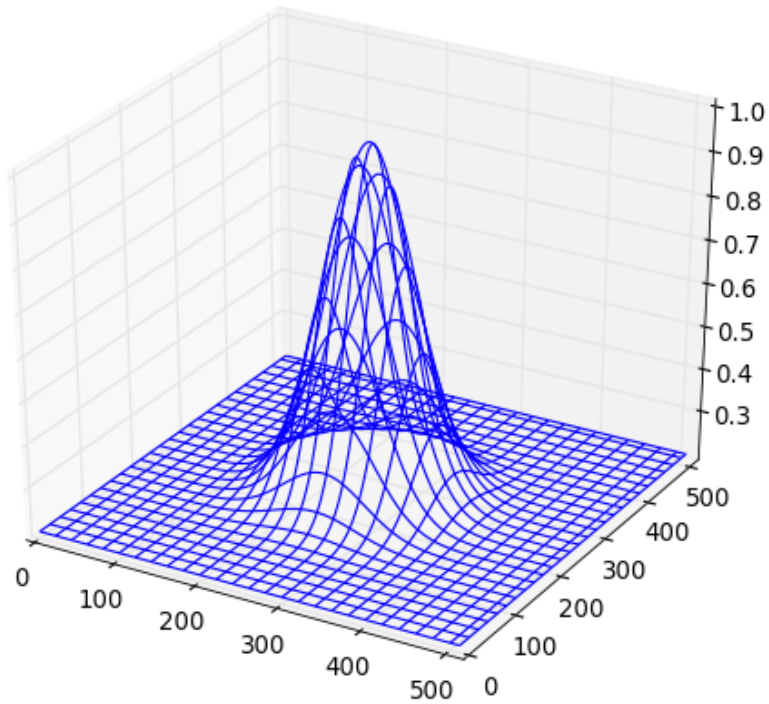
$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v) + N(u, v) \Leftrightarrow \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

- ad-hoc Lösung: hohe Frequenzen ausschließen

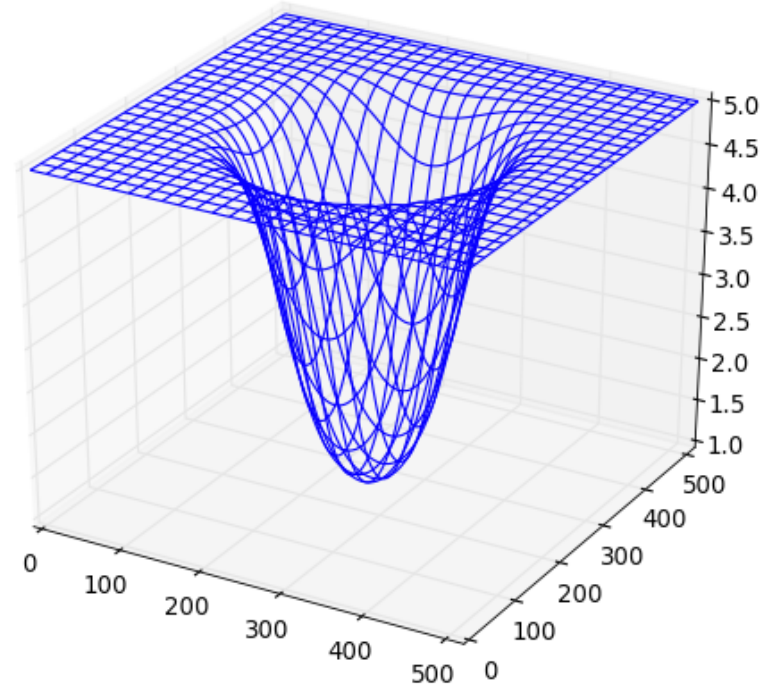
Rauschen

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v) + N(u, v) \Leftrightarrow \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

PSF: $H(u, v)$

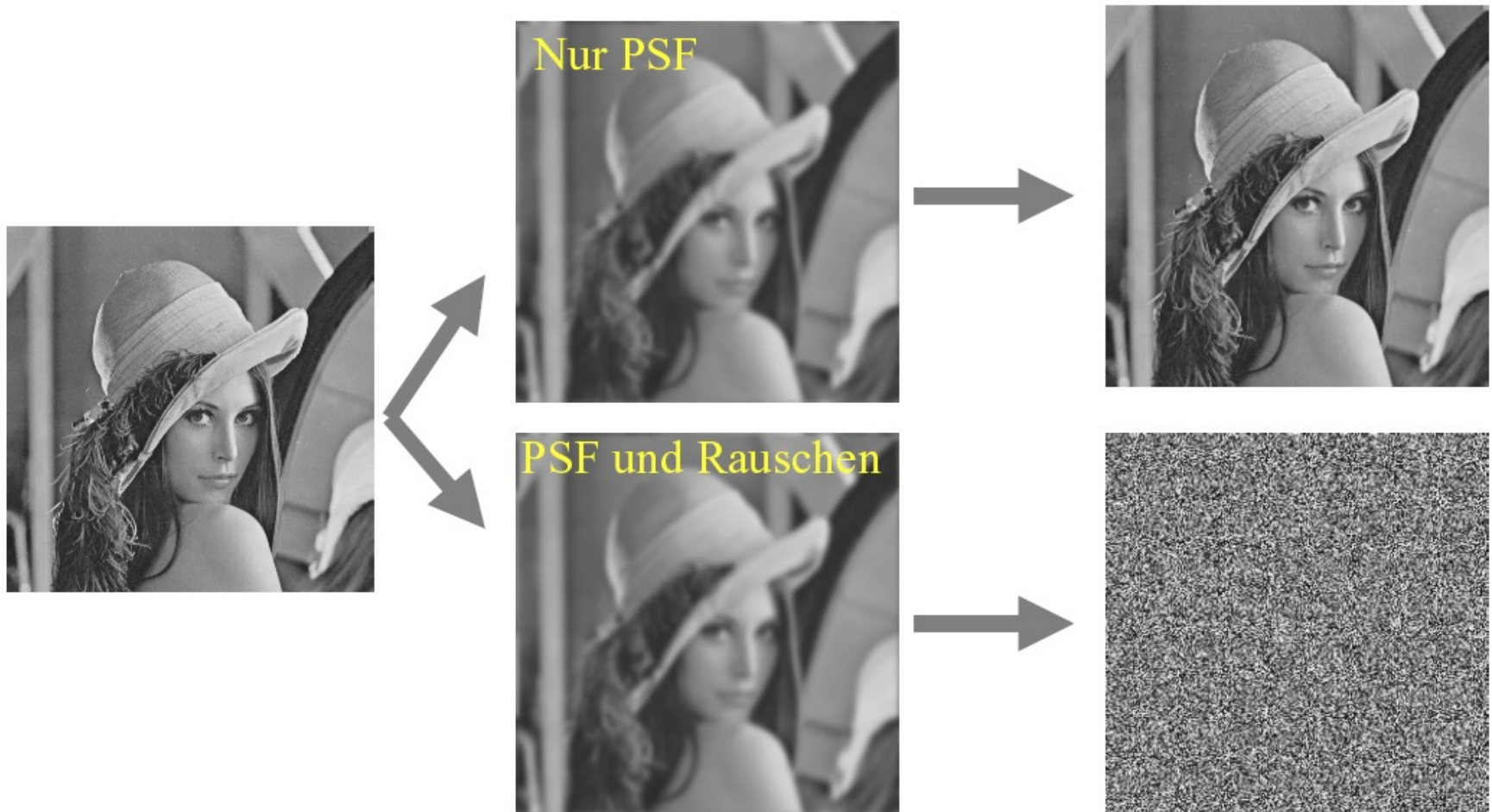


inv. PSF: $\frac{1}{H(u, v)}$



Rauschen

- Invertierung bei Rauschen oft nicht möglich

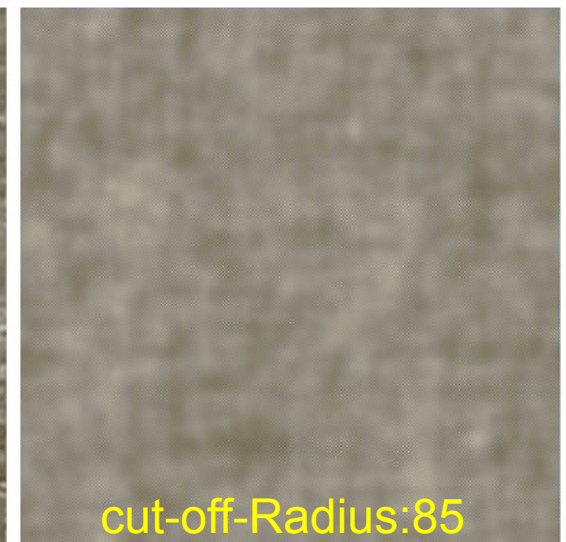
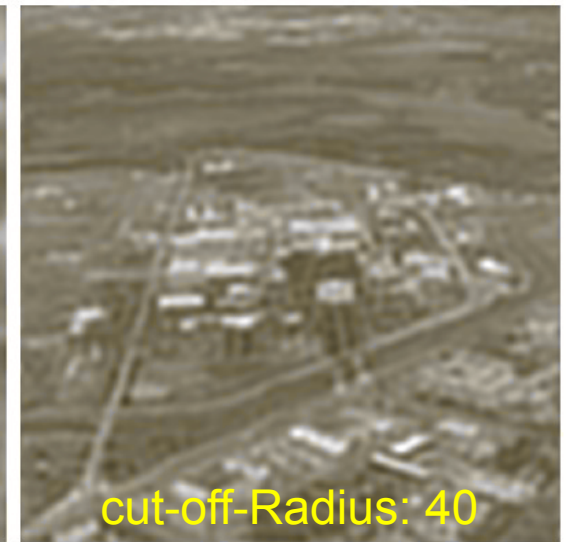
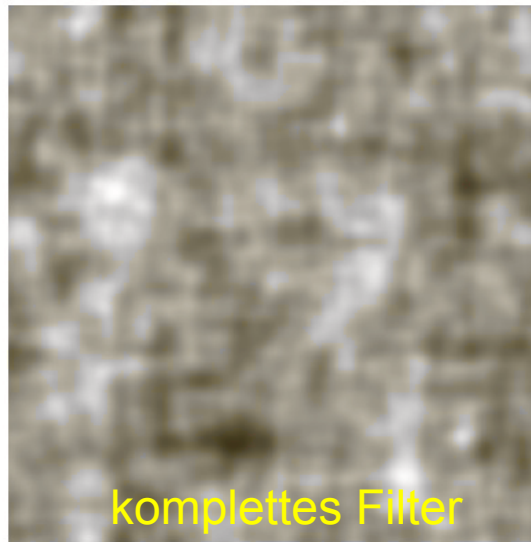


Abschneiden hoher Frequenzen

a	b
c	d

FIGURE 5.27

Restoring Fig. 5.25(b) with Eq. (5.7-1). (a) Result of using the full filter. (b) Result with H cut off outside a radius of 40; (c) outside a radius of 70; and (d) outside a radius of 85.



© R. C. Gonzalez & R. E. Woods, Digital Image Processing

Gewichtete inverse Filterung

- Gewichtung der inversen Filterung mit der Amplitude der Störungsfunktion im Verhältnis zur mittleren Amplitude des Signals

$$\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|}{A_N}$$

Amplitude der PSF
 A_N mittlere Amplitude der Rauschens

Gewichtungsfaktor

- Problem: Gewichtung nimmt keine Rücksicht auf die Signalstärke von F
 - Falls Amplitude von F hoch, kann Abschwächung kleiner, d.h. Gewicht größer sein

Wiener Filter

- Minimierung des Fehlers zwischen Originalbild f und Schätzer \hat{f} führt zu

$$\hat{F}(u, v) = X(u, v) \cdot G(u, v)$$

$$X(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)}} = \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \frac{|N(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2}}$$

- S_η und S_f sind die Spektren (Quadrate der Amplituden) des Rauschens bzw. der ungestörten Funktion
 - $S_\eta = 0$ (ungestört) \rightarrow perfekte inverse Filterung
- Wiener Filter dämpft Frequenzen abhängig von SNR

„heuristisches Wiener Filter“

- Leider ist S_η in der Praxis meist unbekannt
- Lösung: Konstante K : „heuristisches Wiener Filter“

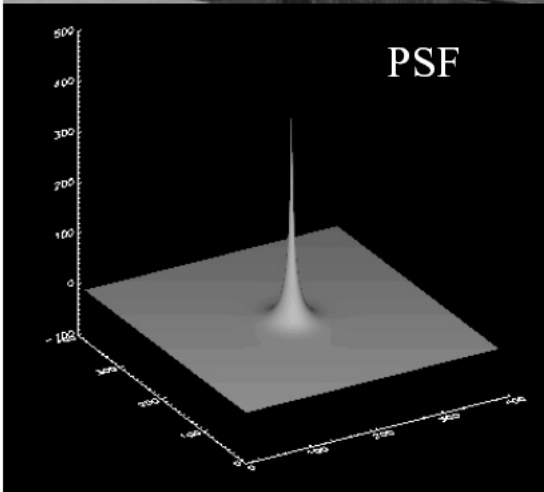
$$\hat{F}_K(u, v) = X_K(u, v) \cdot G(u, v)$$

$$X_K(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K}$$

original



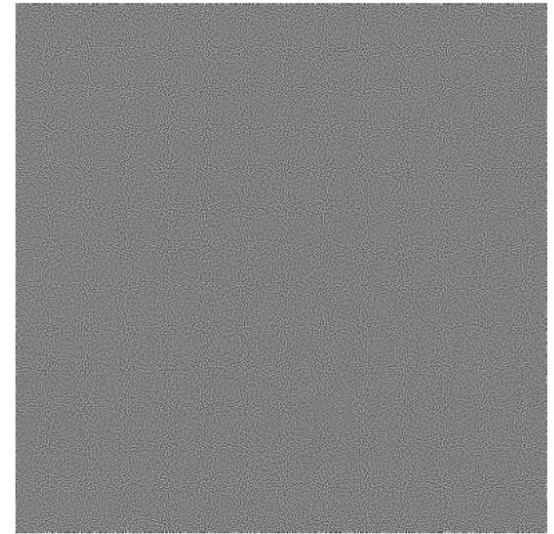
PSF



Beispiel



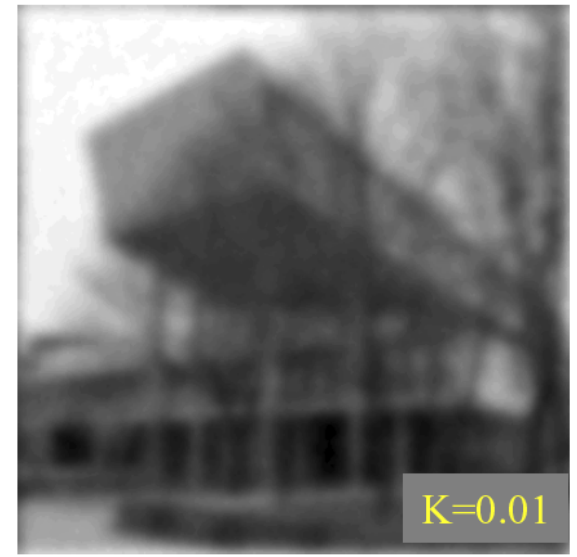
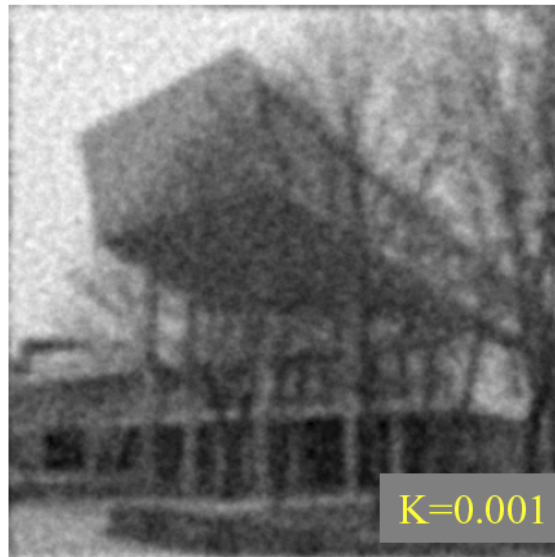
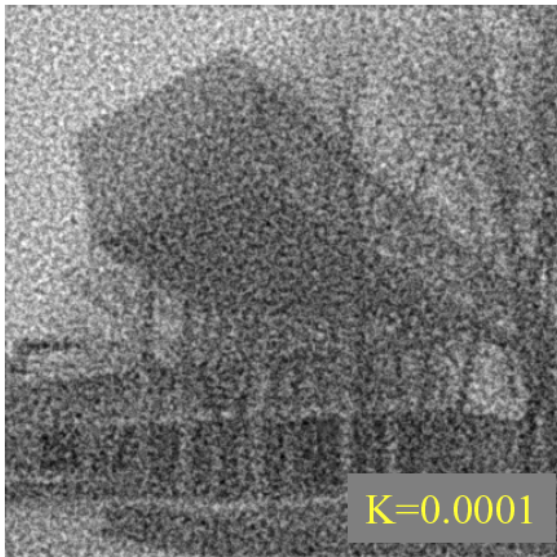
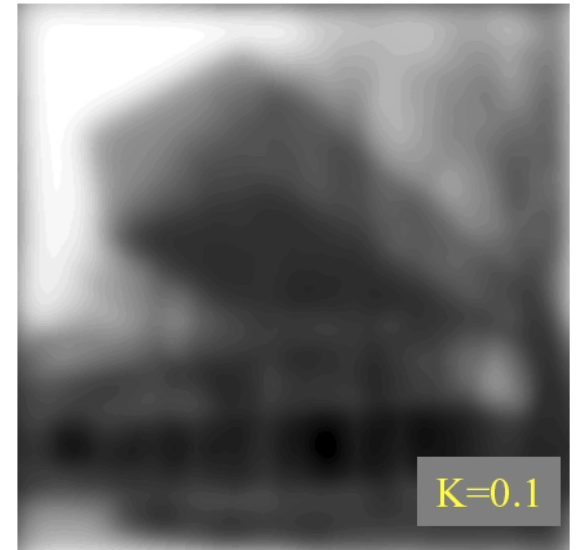
gestörtes Bild



durch Inverse Filterung „restauriert“



(Heuristisches) Wiener Filter



TRANSFORMATION UND INTERPOLATION

Transformation und Interpolation

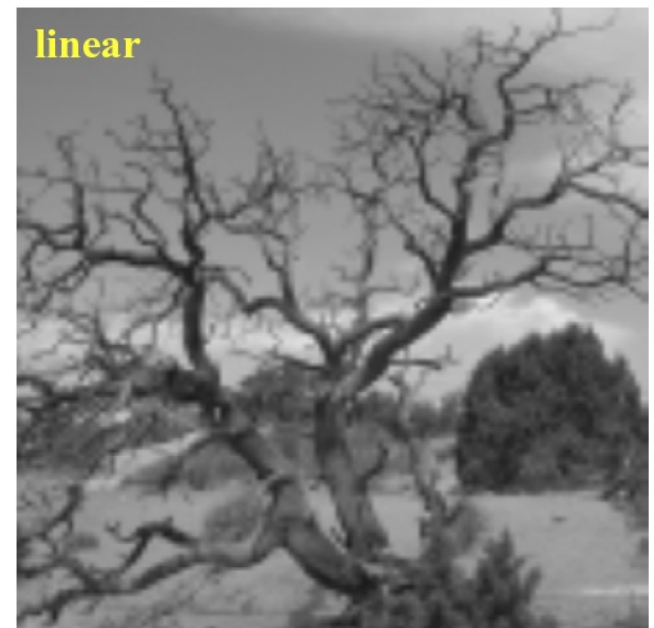
- Die Transformationen Translation, Rotation und Skalierung sind auf reellen Zahlen definiert

$$Rot_{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Tr_{dx,dy} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + dx \\ y + dy \end{pmatrix}, \quad Sc_s \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

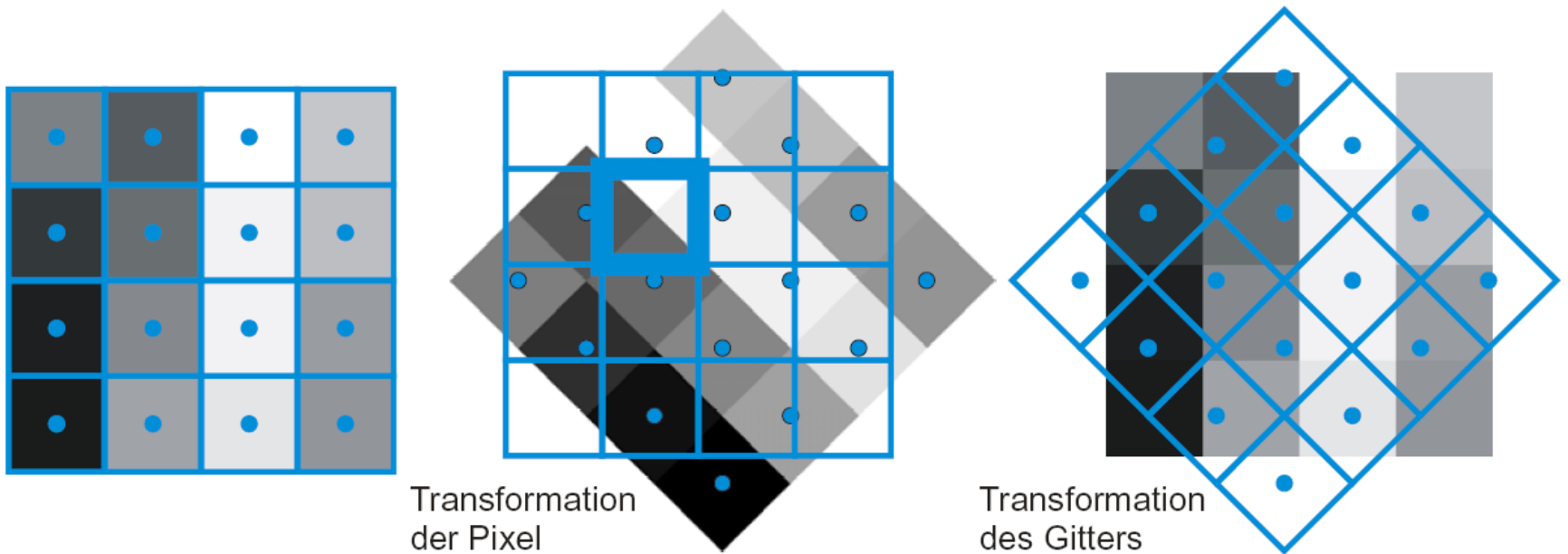
- Digitale Bilder haben einen ganzzahligen Definitionsbereich
- Nach Transformation ist eine Interpolation notwendig

Interpolation

- Konstante Interpolation (Wert des nächsten Nachbarpixels)
- Lineare Interpolation
- Interpolation durch Polynome höheren Grades
- Interpolation im Frequenzraum



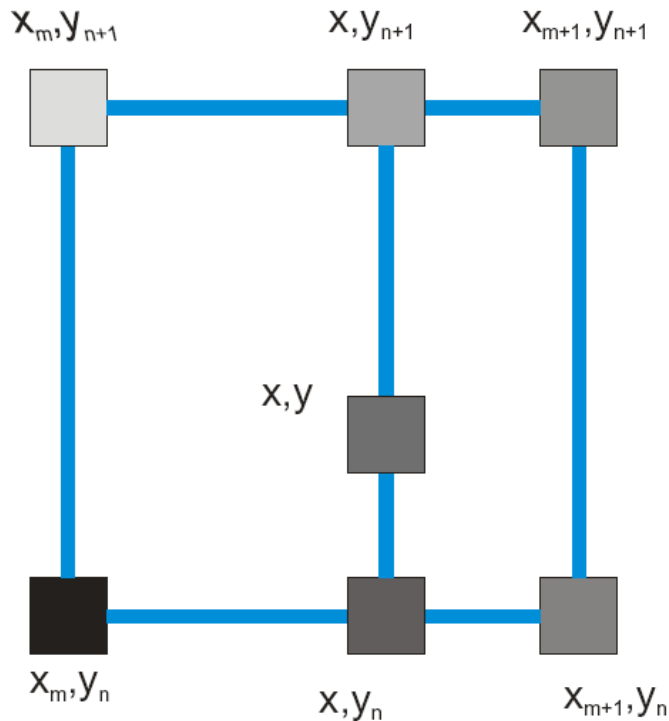
Konstante Interpolation



Transformation
der Pixel

Transformation
des Gitters

Bilineare Interpolation



Erster Schritt:

$$g_1(x_m, y) = \frac{y_{n+1} - y}{y_{n+1} - y_n} f(x_m, y_n) + \frac{y - y_n}{y_{n+1} - y_n} f(x_m, y_{n+1}),$$

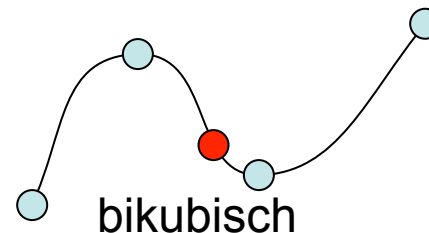
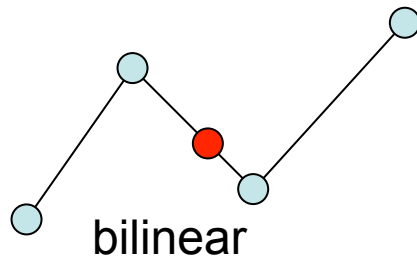
$$g_1(x_{m+1}, y) = \frac{y_{n+1} - y}{y_{n+1} - y_n} f(x_{m+1}, y_n) + \frac{y - y_n}{y_{n+1} - y_n} f(x_{m+1}, y_{n+1}).$$

Zweiter Schritt:

$$g(x, y) = \frac{x_{m+1} - x}{x_{m+1} - x_m} g_1(x_m, y) + \frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m} g_1(x_{m+1}, y).$$

Polynome höheren Grades

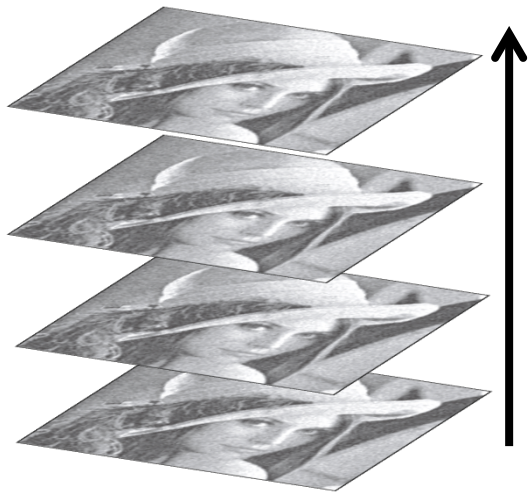
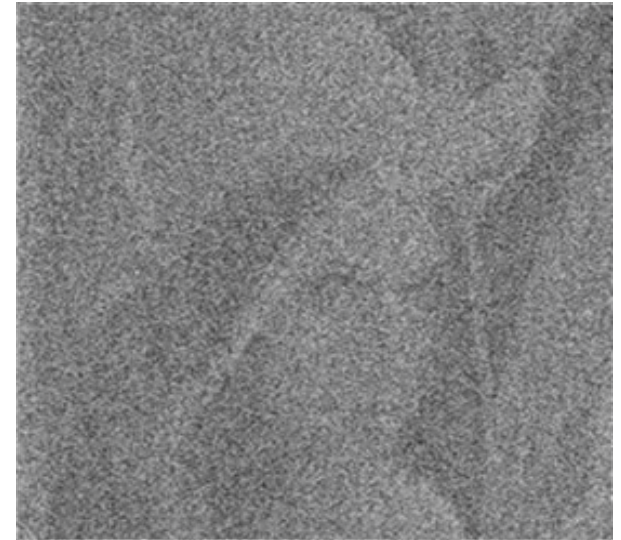
- Interpolation der Bildfunktion durch mehr als 2 Stützpunkte
 - Polynom n -ten Grades interpoliert $n+1$ Punkte
- Die Bildfunktion wird besser angenähert, wenn mehr Terme der Taylor-Approximation berücksichtigt werden.
 - Ableitungen für Taylor-Reihe durch Differenzen angenähert
- Grad des Polynoms ist ein Kompromiss zwischen
 - steigender Anzahl berücksichtigter Terme der Taylor-Reihe
 - steigender Ungenauigkeit der geschätzten Ableitungen



RAUSCHUNTERDRÜCKUNG MIT ÄHNLICHKEITSFILTER

Nicht-lokale Mittelwertbildung

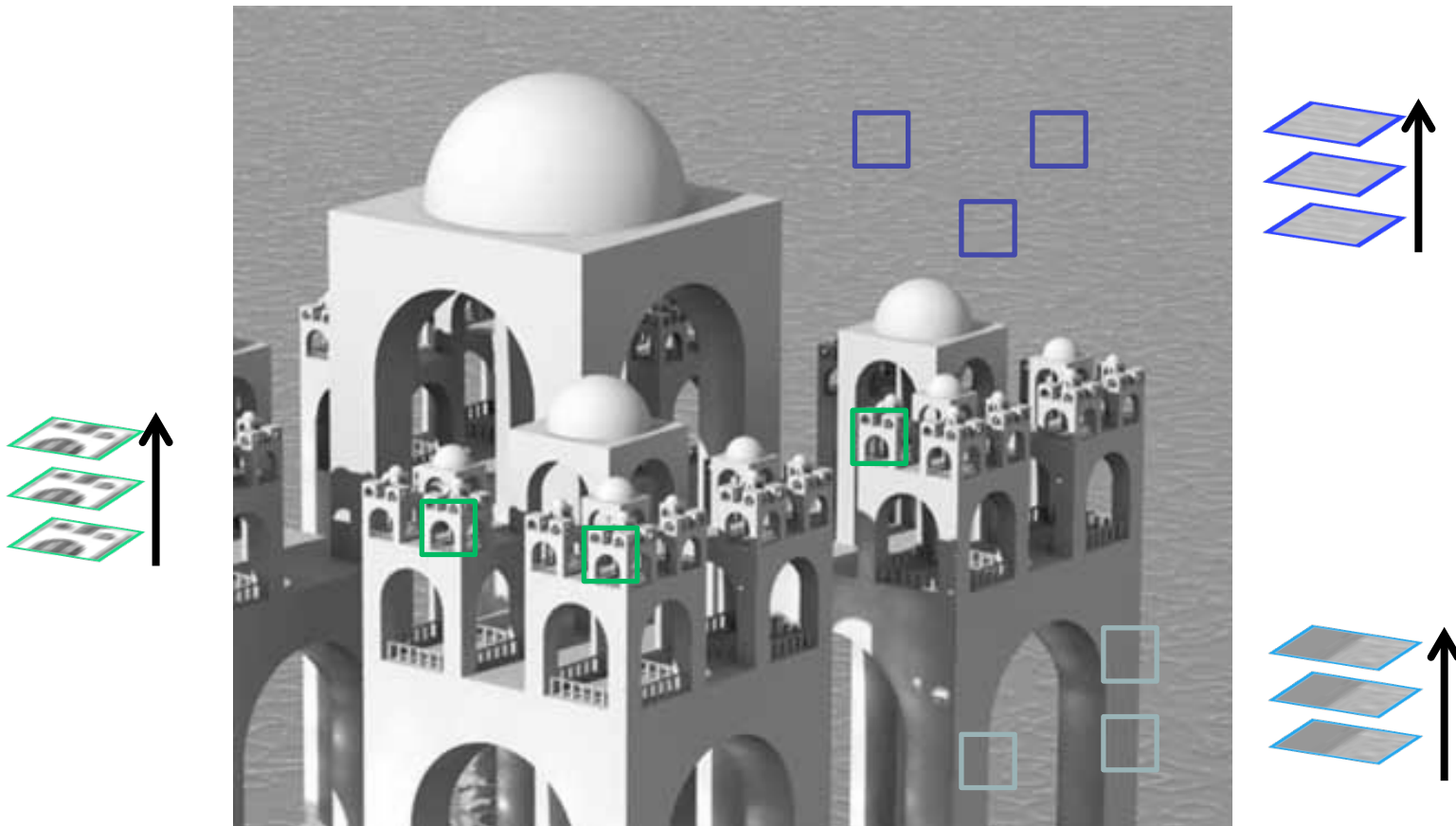
- Mehrere verrauschte Bilder einer statischen Szene
- Rauschen hat Mittelwert 0
- Mittelwert bilden



Figures from: Shahar Kovalsky, Alon Faktor: A Tour of Image Denoising, Slides

Nicht-lokale Mittelwertbildung

- Redundanz in natürlichen Bildern ausnutzen



Figures from: Shahar Kovalsky, Alon Faktor: A Tour of Image Denoising, Slides

Buades, Coll, Morel: Gewichteter Mittelwert durch Selbst-Ähnlichkeit

- Verrauschtes Bild:

$$v = \{v(i) \mid i \in I\}, \quad v(i) = u(i) + n(i)$$

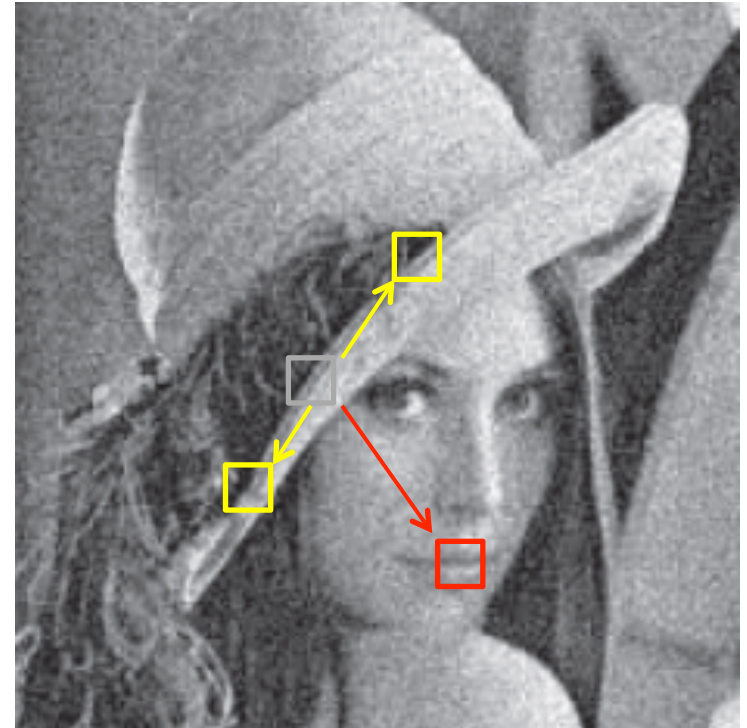
- Nicht-lokaler Mittelwert:

$$NL[v](i) = \sum_{j \in I} w(i, j) v(j)$$

- Gewichtsfunktion

$$w(i, j) = \frac{1}{Z(i)} \exp\left(-\frac{\|v(N_i) - v(N_j)\|_{2,a}^2}{h^2}\right)$$

$$Z(i) = \sum_j \exp\left(-\frac{\|v(N_i) - v(N_j)\|_{2,a}^2}{h^2}\right)$$



Figures from: Shahar Kovalsky, Alon Faktor:
A Tour of Image Denoising, Slides