

# Computergrafik 2: Fourier-Transformation

Prof. Dr. Michael Rohs, Dipl.-Inform. Sven Kratz

[michael.rohs@ifi.lmu.de](mailto:michael.rohs@ifi.lmu.de)

MHCI Lab, LMU München

Folien teilweise von Andreas Butz, sowie von Klaus D. Tönnies  
(Grundlagen der Bildverarbeitung. Pearson Studium, 2005.)

# Vorlesungen

Datum	Thema
24.4.	Einführung, Organisatorisches (Übungen, Klausur)
1.5./8.5.	keine Vorlesungen (wegen 1. Mai und CHI-Konferenz)
15.5.	Abtastung von Bildern, Punktbasierte Verfahren der Bildverbesserung
22.5.	Licht, Farbe, Farbmanagement
30.5.	Konvolution, Filterung im Ortsraum (Verschiebung wegen Pfingstdienstag)
5.6.	Fouriertransformation: Grundlagen
12.6.	Filterung im Frequenzraum
19.6.	Kanten, Linien, Ecken
26.6.	Segmentierung
3.7.	Segmentierung, Morphologische Operationen
10.7.	Klassifikation
17.7.	Image Matching
24.7.	Klausur (Hörsaal M 018 im Hauptgebäude, 14-16 Uhr)

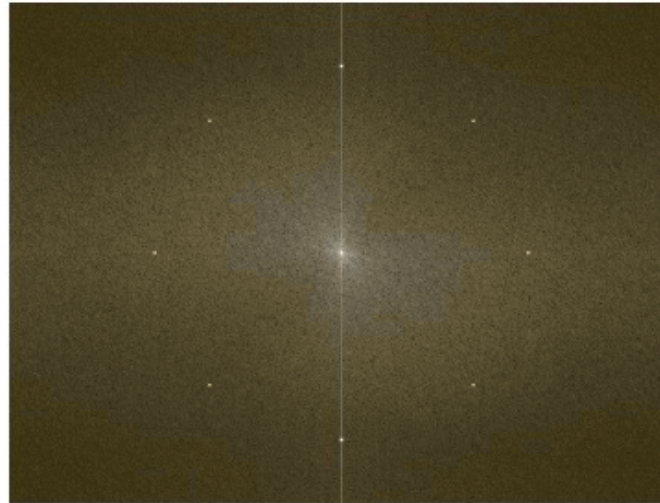
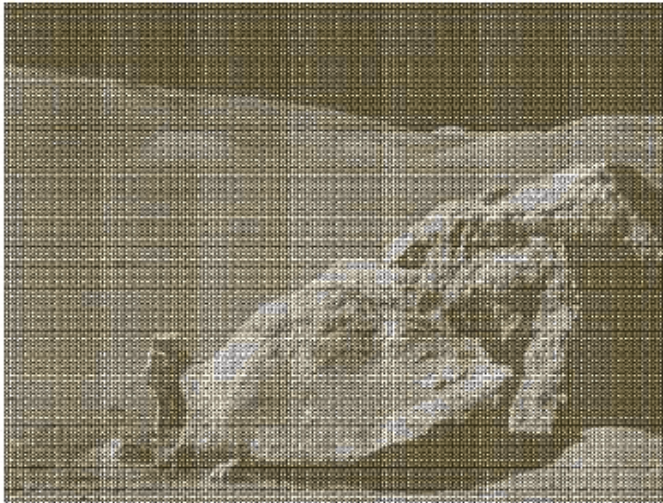
# Themen heute

- Fourier-Transformation
  - Grundidee
  - Konstruktion der Fourier-Basis
  - Phase und Amplitude
  - Eigenschaften der FT
  - Konvolution und Korrelation im Frequenzraum
  - Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

# Motivation

- Manche Operationen sind im Ortsraum (d.h. auf den Pixeln des Bildes) schwer
  - Herausfiltern bestimmter Frequenzen
  - Beseitigung störender Details
  - Konvolution, Korrelation
  - Frequenzraum als „Labor“ zur Entwicklung von Filtern
- Idee: übertrage Bild in einen Raum, in dem diese Operationen leichter sind
  - z.B. Zerlegung des Bildes in Frequenzen
  - Rückweg muss möglich sein!
  - Verschiedene Möglichkeiten, gleiches Prinzip

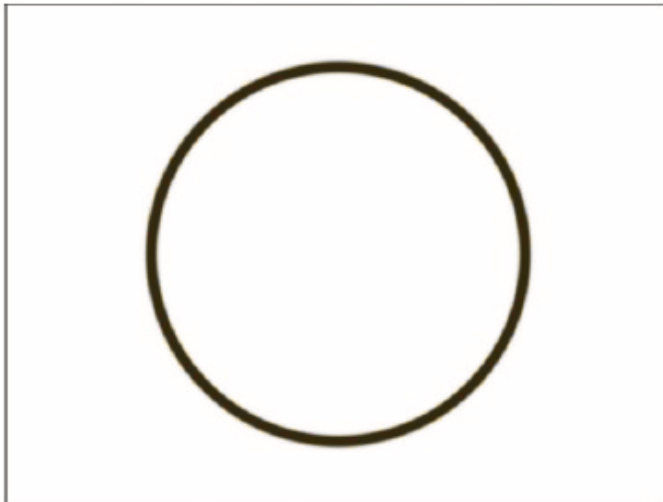
# Beispiel: Artefakte entfernen



a	b
c	d

**FIGURE 2.40**

(a) Image corrupted by sinusoidal interference. (b) Magnitude of the Fourier transform showing the bursts of energy responsible for the interference. (c) Mask used to eliminate the energy bursts. (d) Result of computing the inverse of the modified Fourier transform. (Original image courtesy of NASA.)



# Motivation

- Bisher: Darstellung des Bildes im **Ortsraum** durch den Grauwert an einem bestimmten Ort
- Jetzt: Darstellung im **Frequenzraum** durch cos und sin Funktionen verschiedener Frequenzen
- Eindeutige und vollständige Darstellung in beiden Räumen

Ortsraum



Fourier-Transformation

inverse Fourier-Transformation

Frequenzraum





# Fourier

- Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)
- Französischer Physiker und Mathematiker
- Erfinder der Fourier-Transformation



Johann Bernoulli, \*1667

↑ Advisor

Leonhard Euler, \*1707

↑ Advisor

Joseph-Louis Lagrange, \*1736

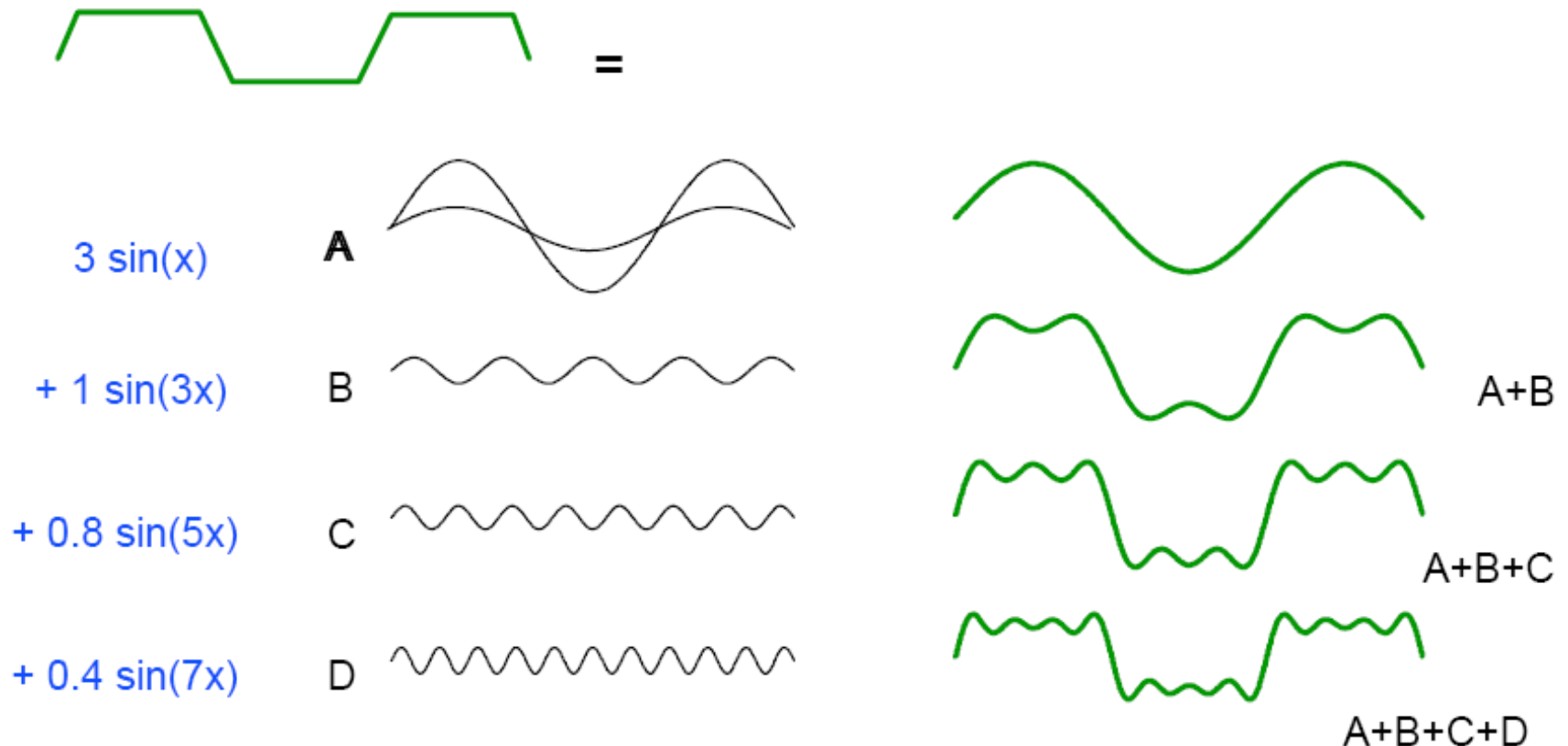
↑ Advisor

Jean Baptiste Joseph Fourier

Quelle: [www.genealogy.ams.org](http://www.genealogy.ams.org)

# Fourier-Transformation: Grundidee

Beschreibe beliebige Funktion als gewichtete Summe periodischer Grundfunktionen (Basisfunktionen) mit unterschiedlicher Frequenz

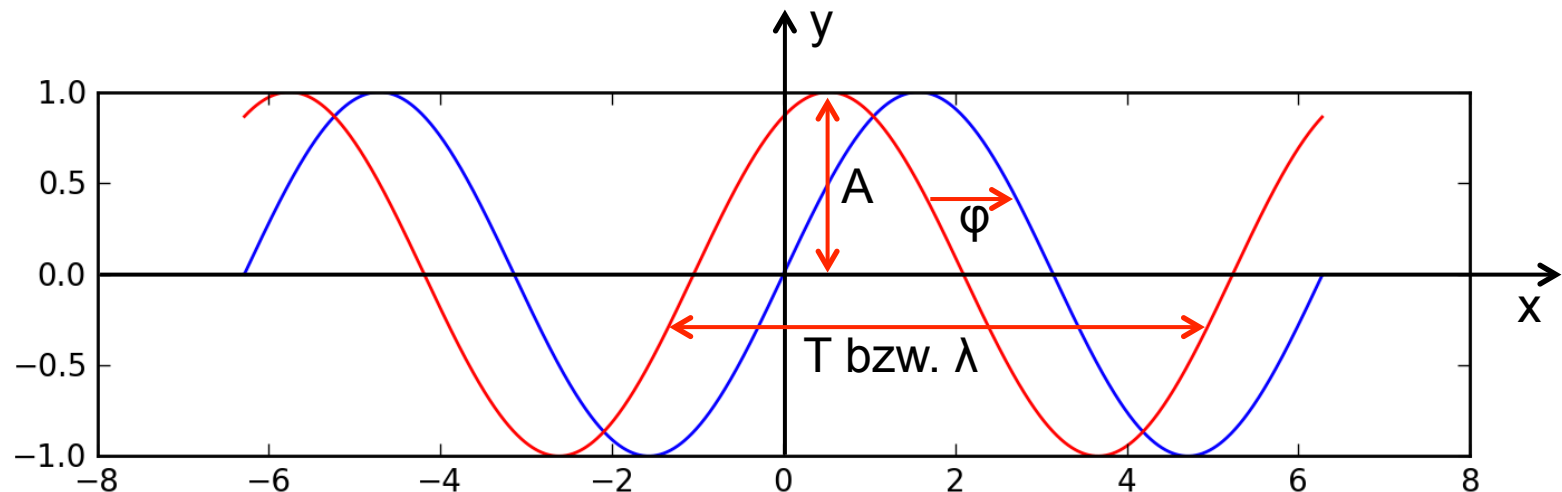




# Parameter Periodischer Grundfunktionen

$$y(x) = A \sin(2\pi f x + \varphi)$$

- **A Amplitude:** Intensität des Signals
- **$\varphi$  Phase:** Verschiebung zum Ursprung
- **Frequenz** zeitlich  $f(t)$       **Frequenz** räumlich  $f(x)$   
T Periodendauer [s]                       $\lambda$  Wellenlänge [m]  
f Frequenz  $f = 1/T$  [1/s=Hz]          f Raumfrequenz  $f = 1/\lambda$  [1/m]  
 $\omega$  Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$           k Wellenzahl  $k = 2\pi/\lambda$



# Fouriers Theorem

Jede beliebige periodische Funktion lässt sich darstellen als Summe von sin und cos Funktionen unterschiedlicher Frequenzen.

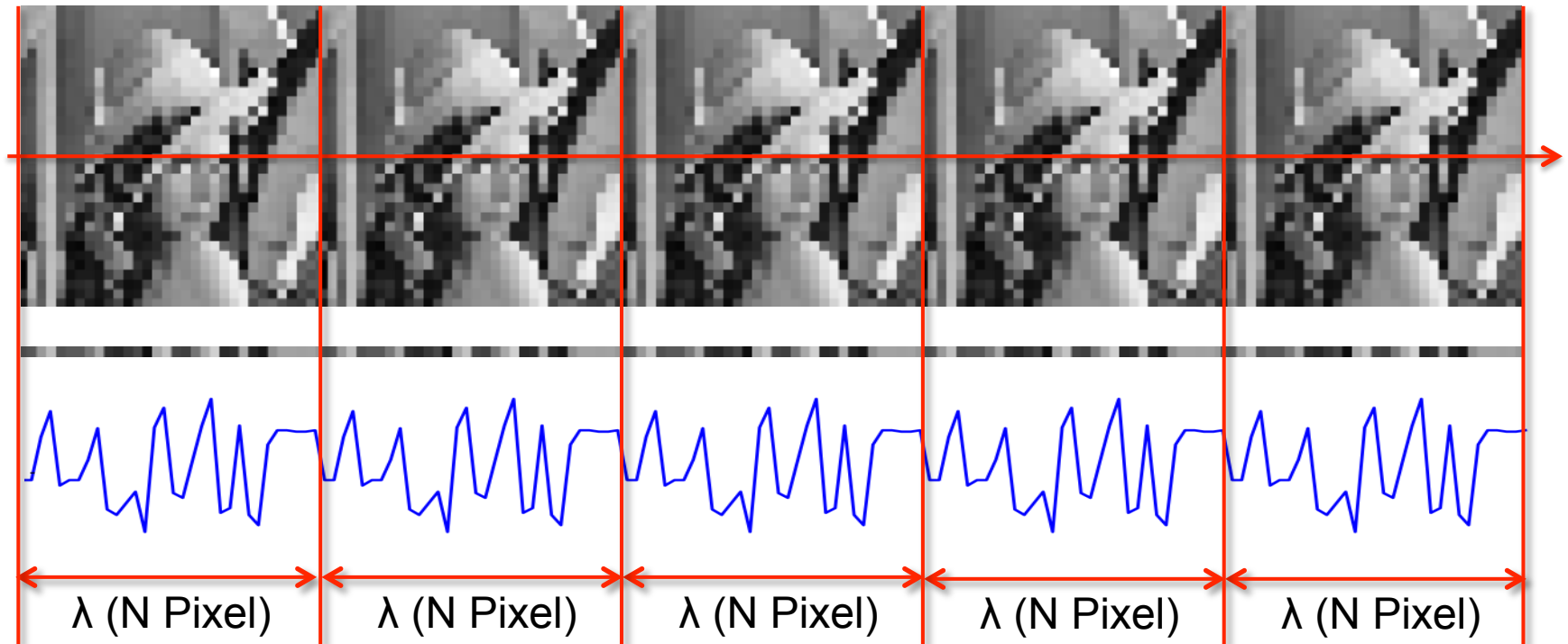
- Ist die Funktion nicht periodisch, aber auf einen bestimmten Definitionsbereich beschränkt, so kann man diesen Bereich einfach kopieren (periodisch fortsetzen) und hat damit wieder eine periodische Funktion.
- Die Zeilen und Spalten eines Bildes kann man als nichtperiodische diskrete Funktionen auffassen. Man kann also auch ein Bild Fourier-transformieren.

# Ist ein Bild eine periodische Funktion?



# Ist ein Bild eine periodische Funktion?

- Zunächst: Betrachtung der periodischen Fortführung einer Zeile



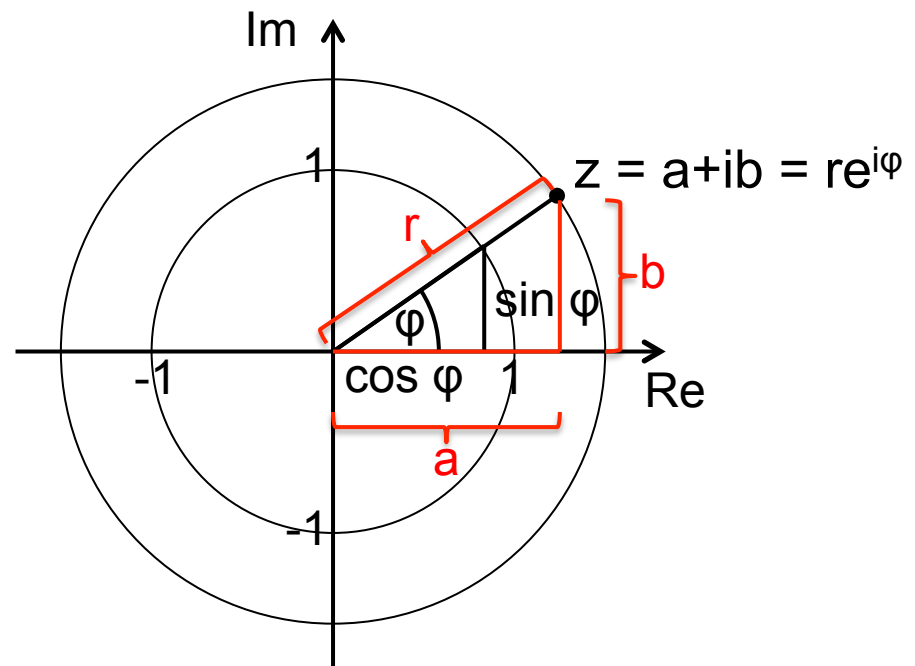
# kontinuierliche Fourier-Transformation

- Transformation vom Ortsraum in den Frequenzraum

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x u} dx$$

- Transformation vom Frequenzraum in den Ortsraum

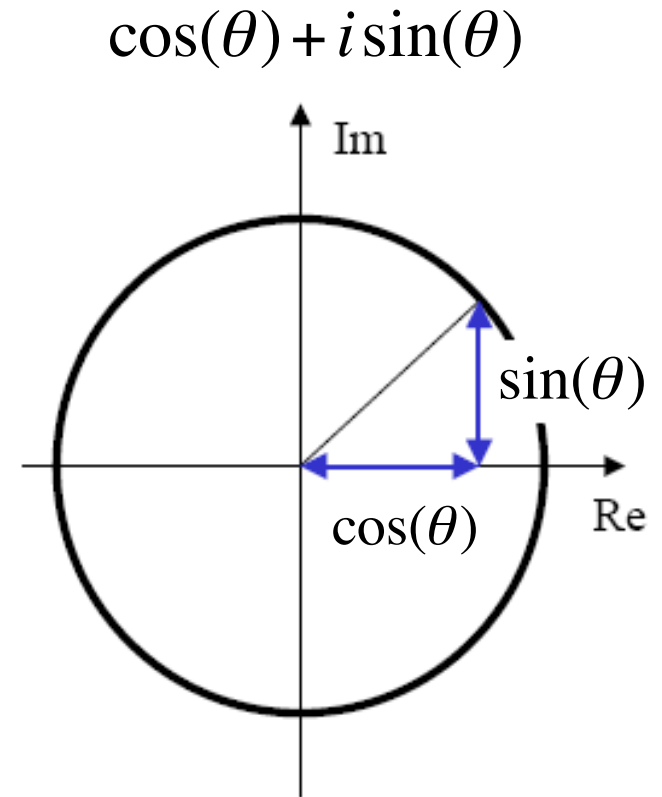
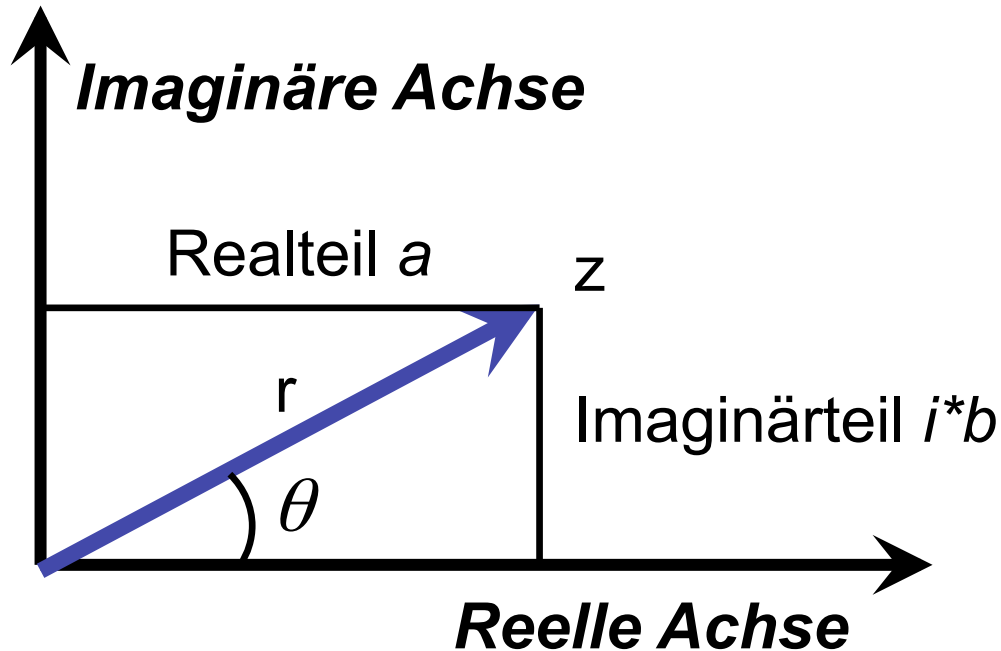
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i x u} du$$



# Erinnerung: komplexe Zahlen

- Im Bereich der reellen Zahlen gibt es keine Lösung für  $x^2 = -1$ 
  - Einführung der imaginären Zahlen
  - $i$ : Lösung der Gleichung  $x^2 = -1$
- Die Gruppe der reellen und imaginären Zahlen nennt man **komplexe Zahlen**
- Komplexe Zahl  $z$ :  
 **$z = a + i b$** , wobei  $a$  und  $b$  reell sind

# Erinnerung: komplexe Zahlen

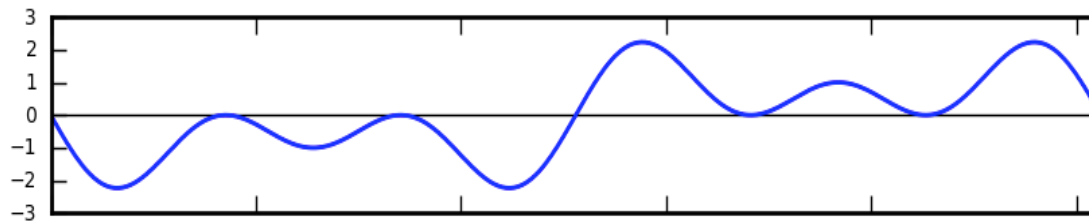


$$z = a + ib = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$



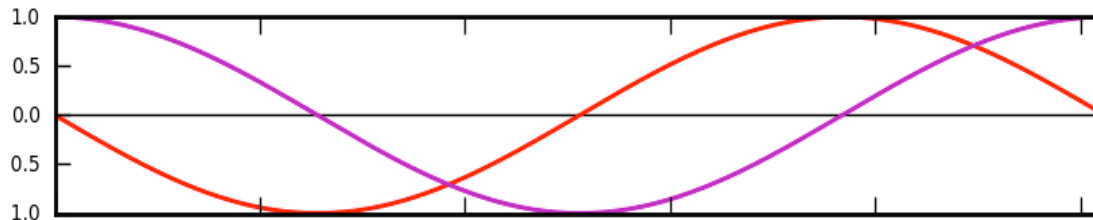
# Funktion mit sin und cos multiplizieren

Originalfunktion



—  $f(x)$ ,  $x = 0..1$

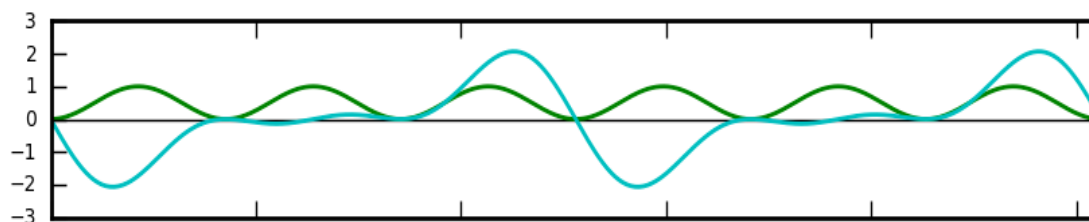
Abtastungsfunktionen



—  $\cos(-2\pi x)$

—  $\sin(-2\pi x)$

Ergebnis ( $f \cdot \sin$  und  $f \cdot \cos$ )

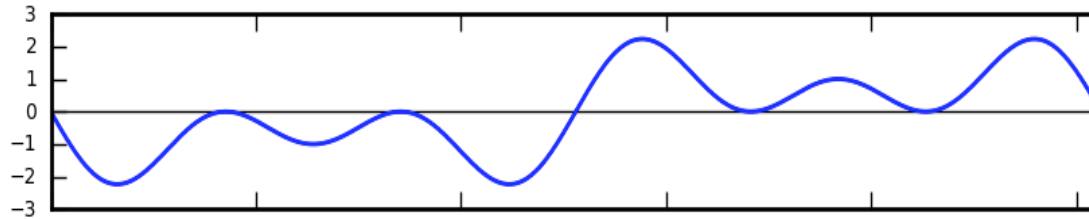


—  $f(x) \cdot \cos(-2\pi x)$

—  $f(x) \cdot \sin(-2\pi x)$

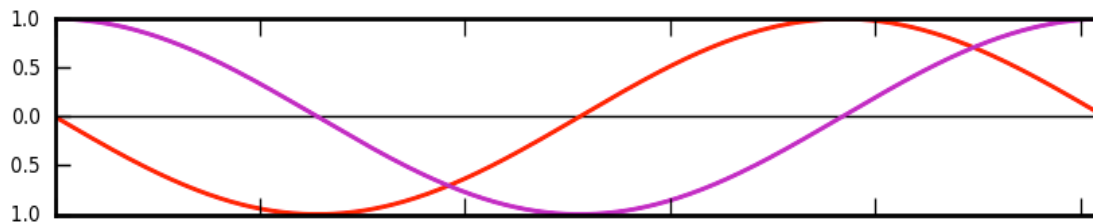
# Beispiel: $F(1) = \dots$

Originalfunktion



—  $f(x)$ ,  $x = 0..1$

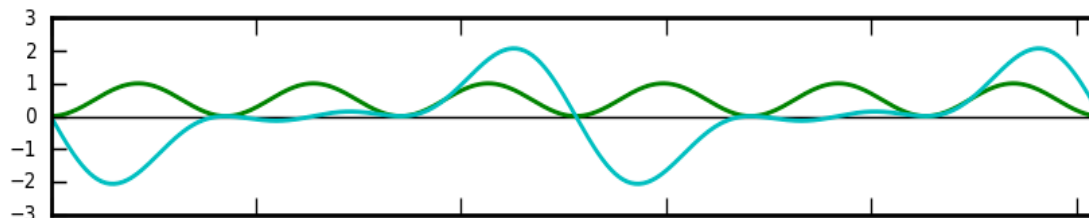
Gewichtungsfunktionen



—  $real(e^{-i2\pi x}) = \cos(-2\pi x)$

—  $imag(e^{-i2\pi x}) = \sin(-2\pi x)$

Ergebnis ( $f \cdot \sin$  und  $f \cdot \cos$ )



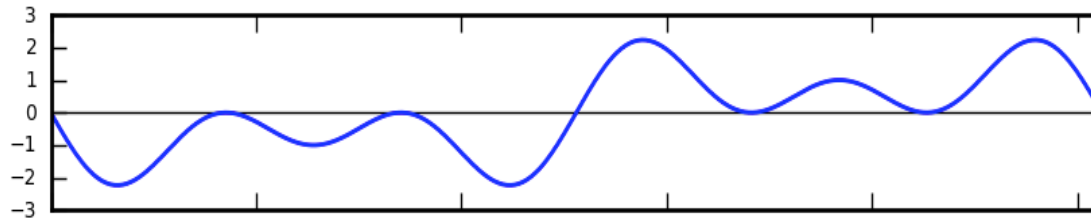
—  $real(f(x) \cdot e^{-i2\pi x})$

—  $imag(f(x) \cdot e^{-i2\pi x})$

$$F(1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i2\pi x} dx$$

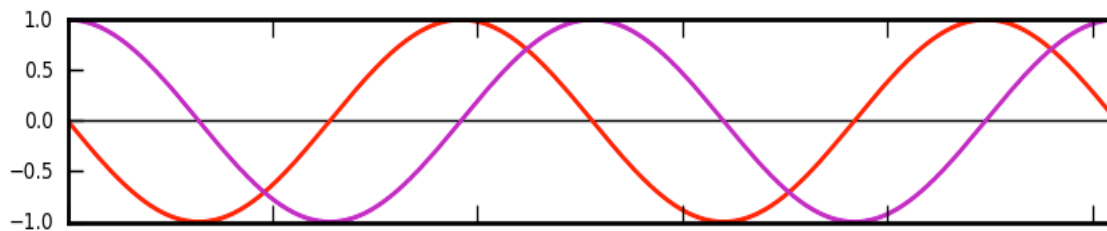
# Beispiel: $F(2) = \dots$

Originalfunktion



—  $f(x), \quad x = 0..1$

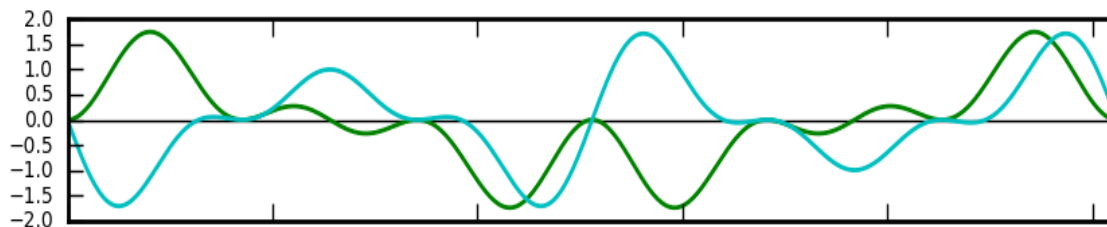
Gewichtungsfunktionen



—  $real(e^{-i2\pi 2x}) = \cos(-2\pi 2x)$

—  $imag(e^{-i2\pi 2x}) = \sin(-2\pi 2x)$

Ergebnis ( $f \cdot \sin$  und  $f \cdot \cos$ )



—  $real(f(x) \cdot e^{-i2\pi 2x})$

—  $imag(f(x) \cdot e^{-i2\pi 2x})$

$$F(2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i2\pi 2x} dx$$

# Fourier-Transformation: Eigenschaften

- Transformation: verändert eine Funktion nicht, sondern stellt sie nur anders dar
- Transformation ist umkehrbar → inverse Fourier-Transformation
- Analog zum Basiswechsel in der Vektorrechnung
- digitale Bilder
  - Bild als endliche Funktion, definiert durch Auflistung der Werte
  - Definitionsbereich  $(x,y)$  diskret und endlich
  - Wertebereich  $f(x,y)$  diskret und endlich
  - diskrete Fourier-Transformation (DFT)

10	255	4	250
----	-----	---	-----

 ← 1D digitales Bild

# Anschaulich: Basisvektoren eines Bildes

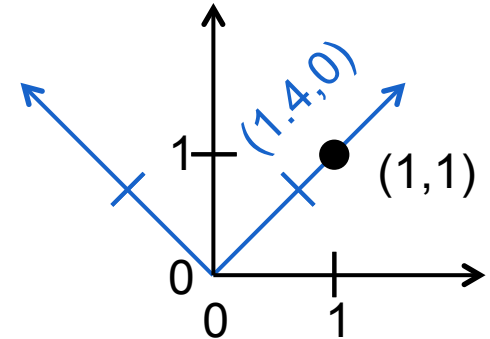
$$\begin{array}{l} \boxed{10} \quad \boxed{255} \quad \boxed{4} \quad \boxed{250} = 10 * \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ + 255 * \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ + 4 * \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\ + 250 * \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^4$   
sind paarweise orthogonal  
haben Länge 1

- Wahl anderer Basisvektoren → Transformation mittels Basiswechsel
- Basiswechsellmatrix vom Rang der Pixelanzahl

# Exkurs: Vektorrechnung

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  bilden eine Basis  $b_1$  des  $\mathbb{R}^3$   
sind paarweise orthogonal  
haben Länge 1

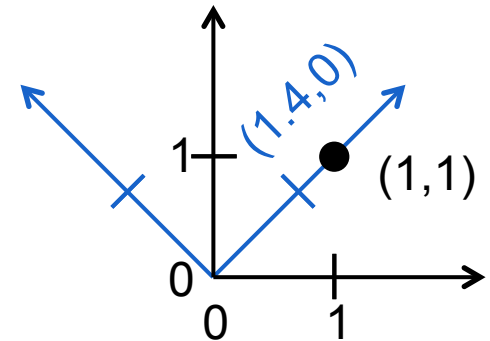


$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  bilden ebenfalls eine Basis  $b_2$  des  $\mathbb{R}^3$   
sind ebenfalls paarweise orthogonal  
Haben ebenfalls Länge 1

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  Ist orthogonal und normiert  
(d.h.  $A^T = A^{-1}$ )  
Ist Basiswechselmatrix  
von  $b_1$  nach  $b_2$

# Exkurs: Vektorrechnung

- Basiswechselmatrix orthogonal und normiert (d.h.  $A^T = A^{-1}$ )
- Basiswechsel:  
 $x' = Ax$
- Rücktransformation:  
 $Ax' = A^T(Ax) = (A^T A)x = (A^{-1}A)x = x$





# Basiswechsel

- Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über Körper  $K$  mit Basen  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  und  $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$
- Darstellung der Vektoren von  $B$  in  $B'$ :  $b_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b'_i$
- Darstellung des Vektors  $v$  in  $B$ :  $v = \sum_{i=1}^n x_i b_i$
- Darstellung des Vektors  $v$  in  $B'$ :  $v = \sum_{i=1}^n x'_i b'_i$

$$v = \sum_{j=1}^n x_j b_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} b'_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} \right) b'_i = \sum_{i=1}^n c_i b'_i = \sum_{i=1}^n x'_i b'_i$$

# Basiswechsel

$$v = \sum_{j=1}^n x_j b_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i' = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} \right) b_i' = \sum_{i=1}^n c_i b_i' = \sum_{i=1}^n x_i' b_i'$$

- Also:  $x_i' = \sum_{j=1}^n x_j a_{ij}$  mit  $b_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i'$

- in Matrix-Notation:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x' = Ax$$

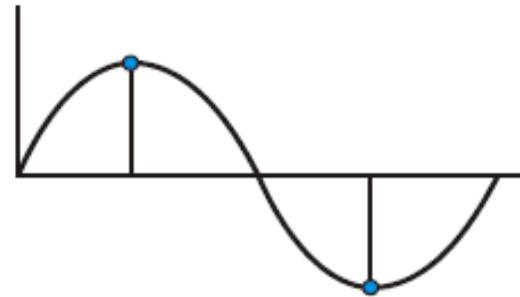
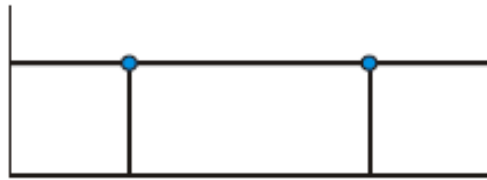
# Orthogonale Funktionen

- Seien  $f_1$  und  $f_2$  Funktionen, die an  $N$  Stellen **abgetastet** sind (also  $N$ -dim. Vektoren)
- $f_1$  und  $f_2$  sind orthogonal, falls gilt:

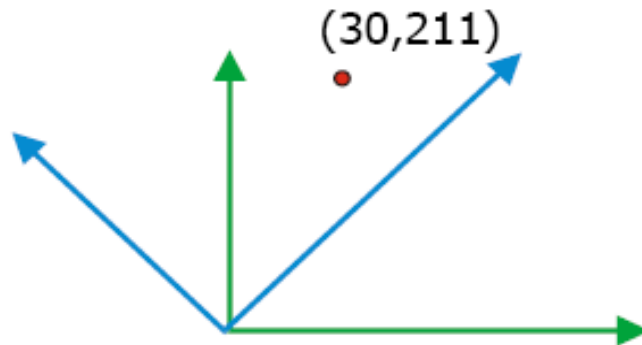
$$f_1 * f_2 = \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k) f_2(k) = 0$$

- D.h. das Skalarprodukt der zugehörigen Vektoren ist 0
- $N$  paarweise orthogonale Funktionen  $f_1 \dots f_N$  bilden damit eine orthogonale Basis des  $N$ -dim. Raums
- Transformationen zwischen orthogonalen Basen sind immer umkehrbar

# Orthogonale Funktionen



Basis:  
 $(1, 1)$   
 $(1, -1)$



Transformation:

$$(30, 211) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (241, -181)$$

Rücktransformation:

$$(241, -181) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = (60, 422)$$

Anmerkung:

Das Resultat der Rücktransformation muss skaliert werden, weil die Basis nicht normiert ist.

# Orthogonale Funktionstransformationen

- Betrachte abgetastete Funktionen wie Vektoren
- Finde neue geeignete orthogonale Basis
- Üblicherweise Basisfunktionen, die Bedeutung bzgl. der betrachteten Eigenschaft haben
  - Fourier-Basis: komplexe, periodische Funktionen
  - Kosinusbasis: Kosinusfunktionen

• Transformiere Bild in diese Basis  $\vec{y} = A\vec{x}$

• Bearbeite es dort

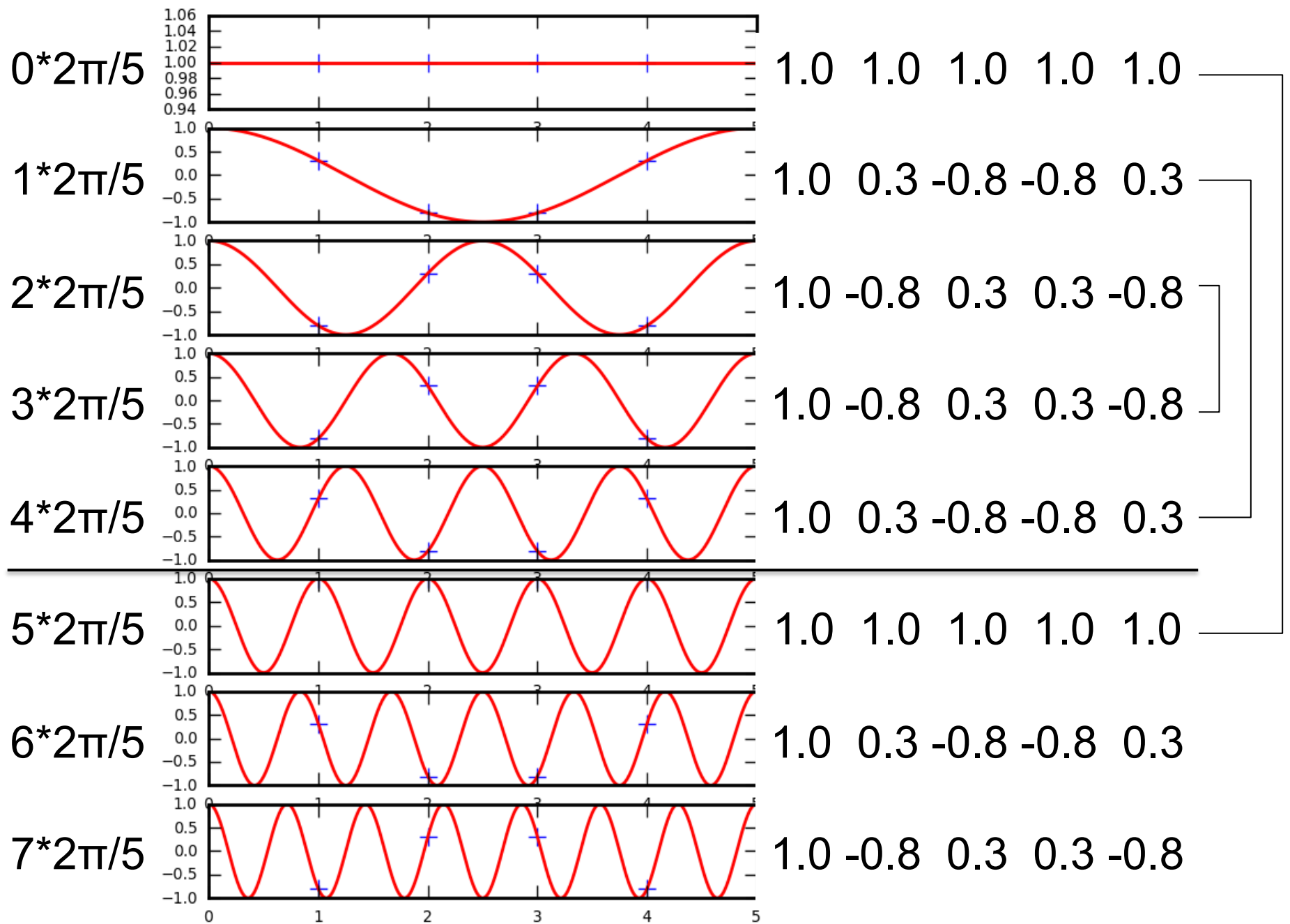
• Transformiere zurück  $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$

# Fourierbasis (1. Versuch, nur cos)

- Ausgangspunkt: Bildzeile mit N Pixeln
- **1. Versuch:** wähle N Kosinusfunktionen

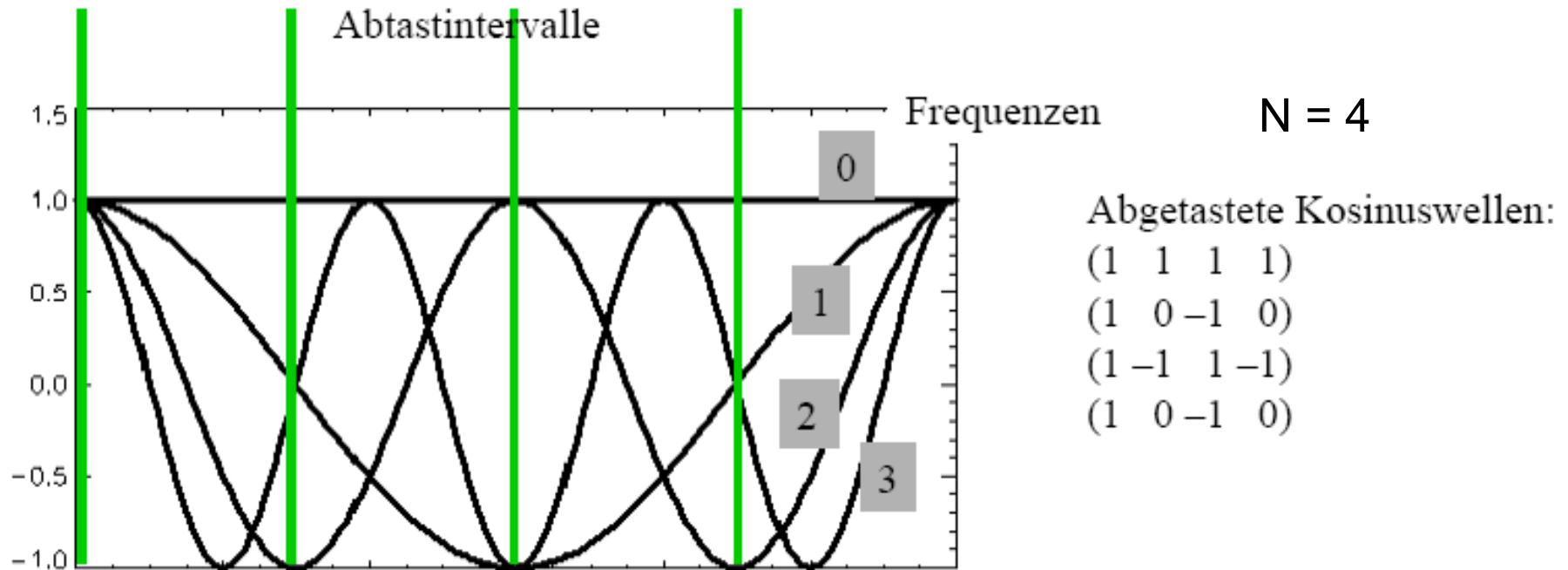
$$\cos\left(0 \cdot \frac{2\pi}{N}\right), \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{N}\right), \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{N}\right), \dots, \cos\left((N-1) \cdot \frac{2\pi}{N}\right)$$

- Beispiel nächste Folie:  $N = 5$ 
  - Problem: abgetastete Funktionswerte gleich für  $i=1$  und  $i=4$  sowie  $i = 2$  und  $i = 3$
  - also keine Basis der Dimension  $N = 5$
  - Vektoren spannen nur 3-dim. Untervektorraum auf



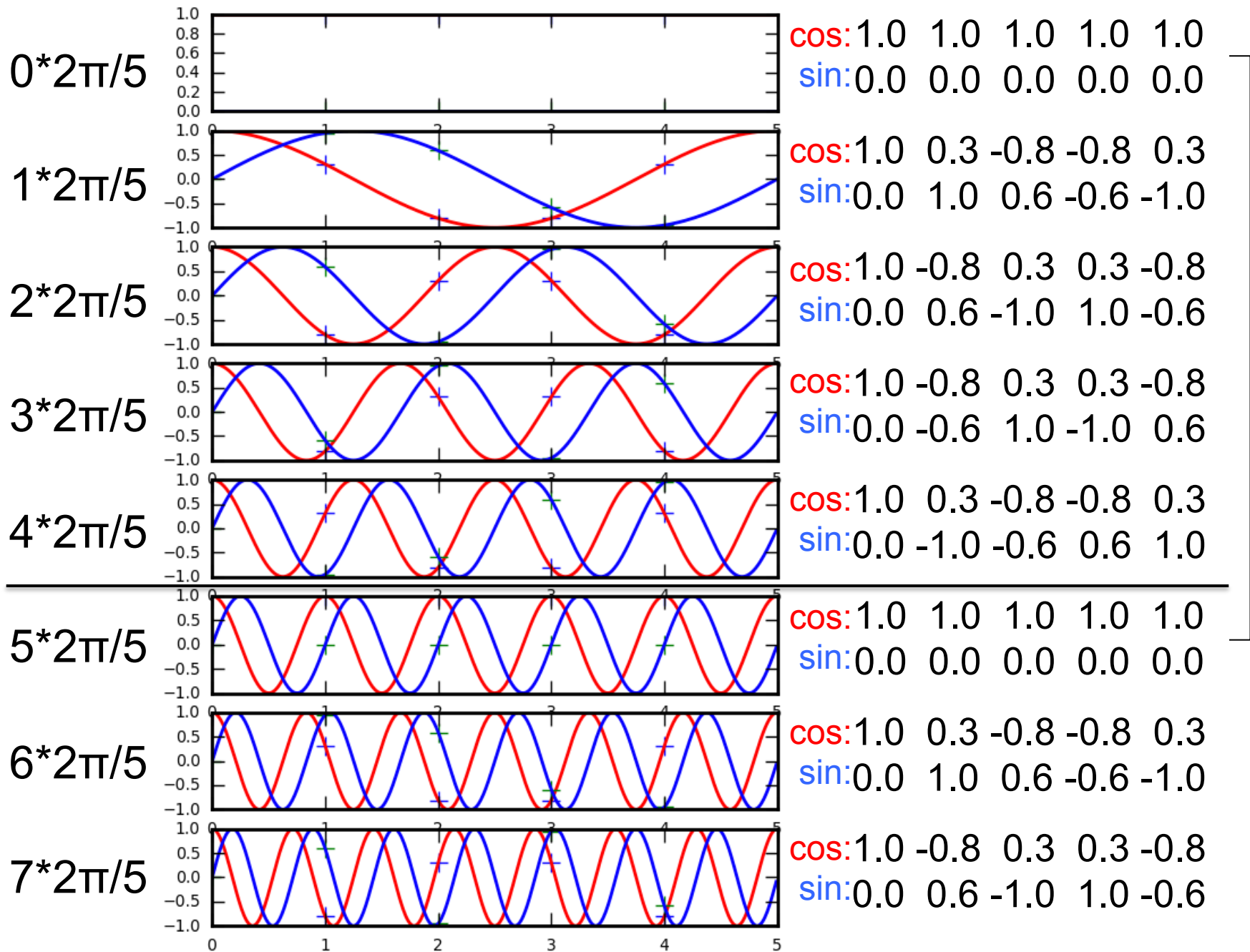


# Fourierbasis (1. Versuch, nur cos)

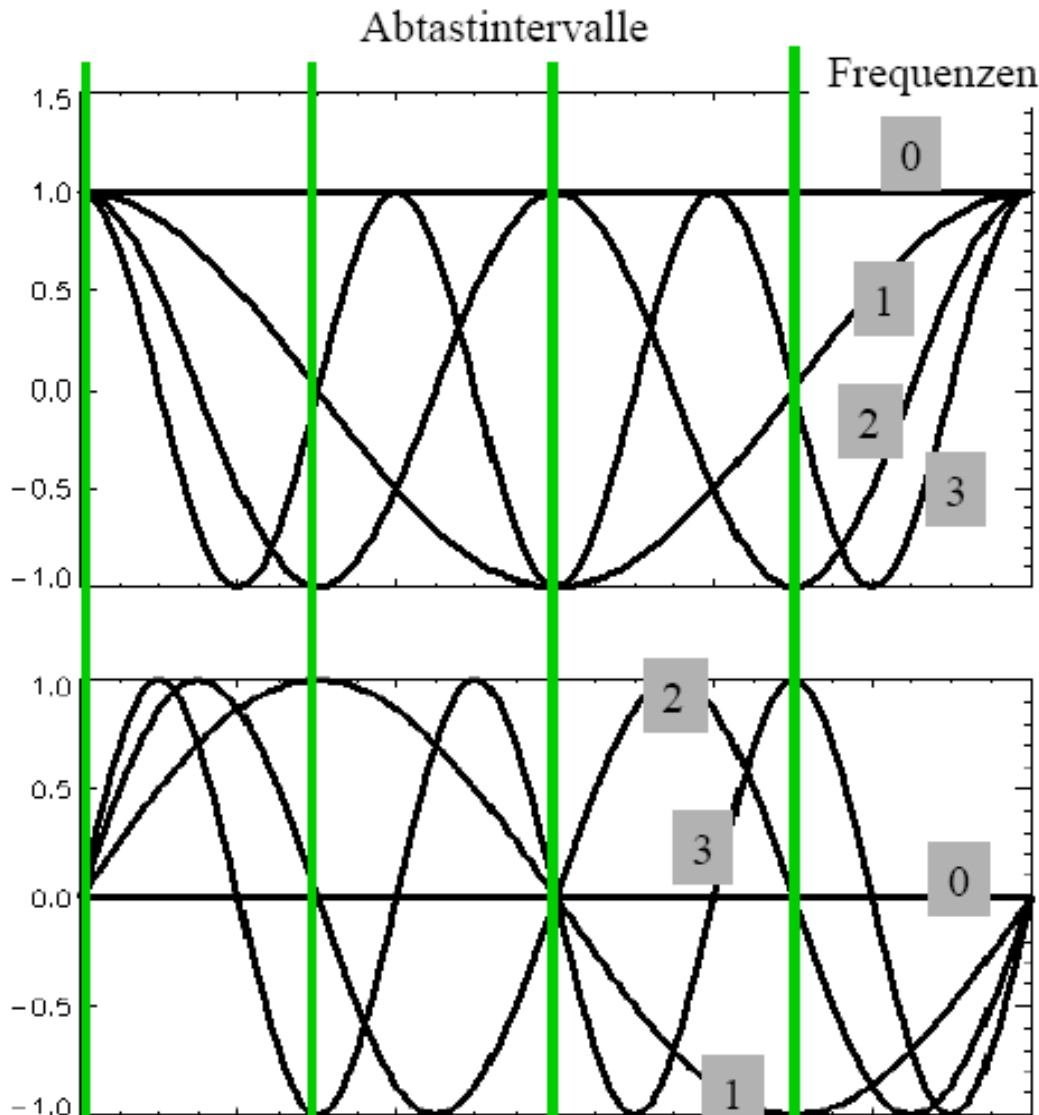


Lösungen:

- frequenzverschobene Perioden (DCT).
- komplexe periodische Funktionen (FT).



# Basisfunktionspaare (cos, sin)



$N = 4$

Abgetastete Kosinuswellen:

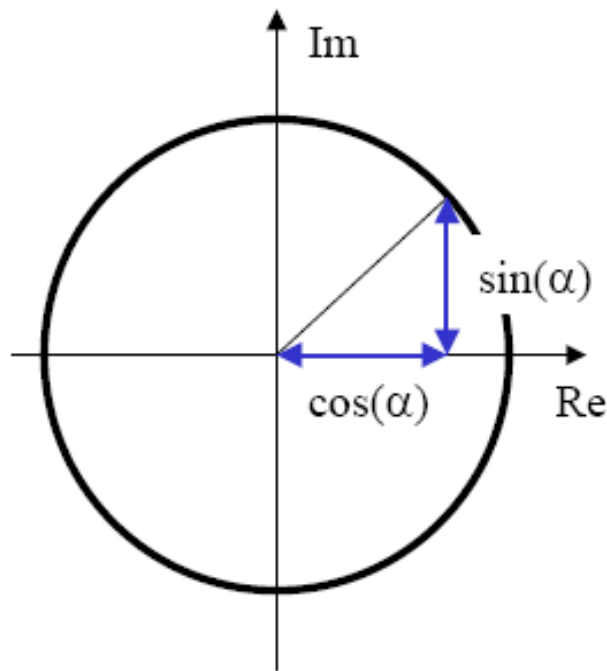
(1 1 1 1)  
 (1 0 -1 0)  
 (1 -1 1 -1)  
 (1 0 -1 0)

Abgetastete Sinuswellen:

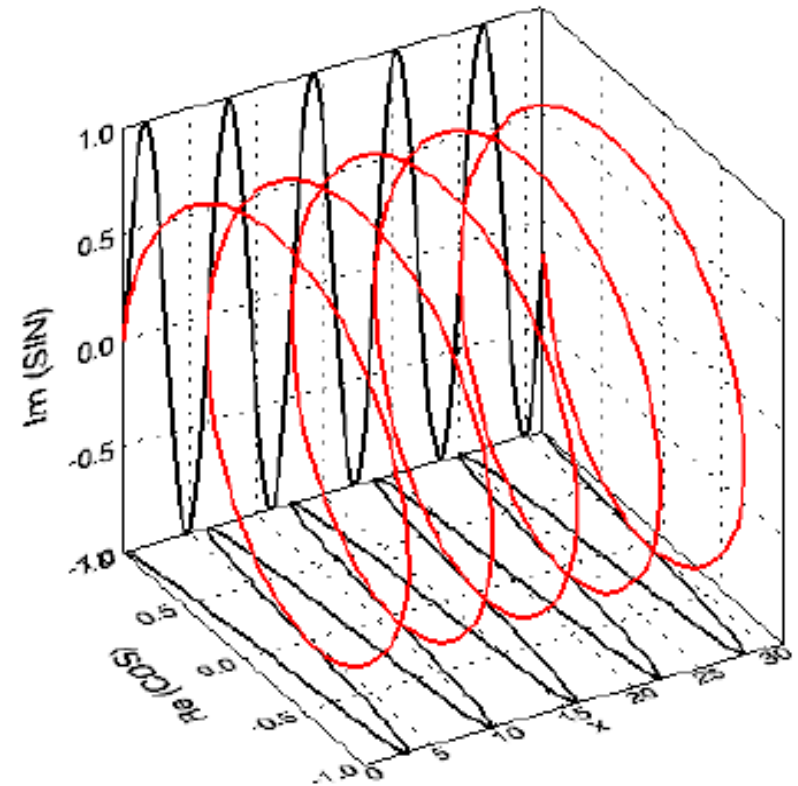
(0 0 0 0)  
 (0 1 0 -1)  
 (0 0 0 0)  
 (0 -1 0 1)

# Komplexe periodische Funktionen

$$\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$$



Alle Werte für komplexe Zahlen der Form  $\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$  liegen auf einem Kreis mit Abstand 1 in der komplexen Ebene.

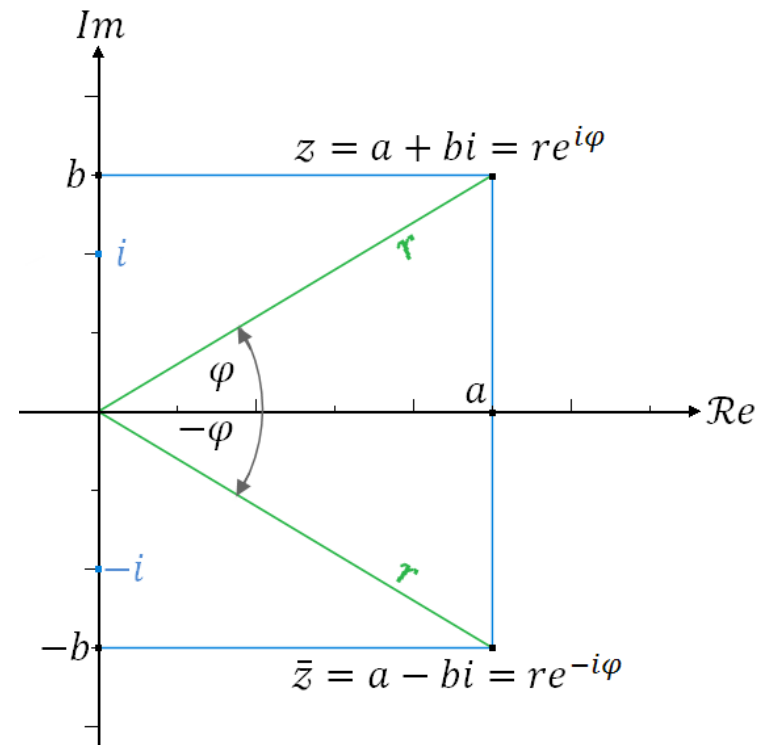


# Komplexes Skalarprodukt

- Skalarprodukt zweier Vektoren mit komplexen Elementen

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_i^* = \sum_{i=0}^{N-1} (\operatorname{Re}(x_i) + i \operatorname{Im}(x_i)) (\operatorname{Re}(y_i) - i \operatorname{Im}(y_i))$$

- Zu  $x = a + ib$  komplex-konjugierte Zahl ist  $x^* = a - ib$

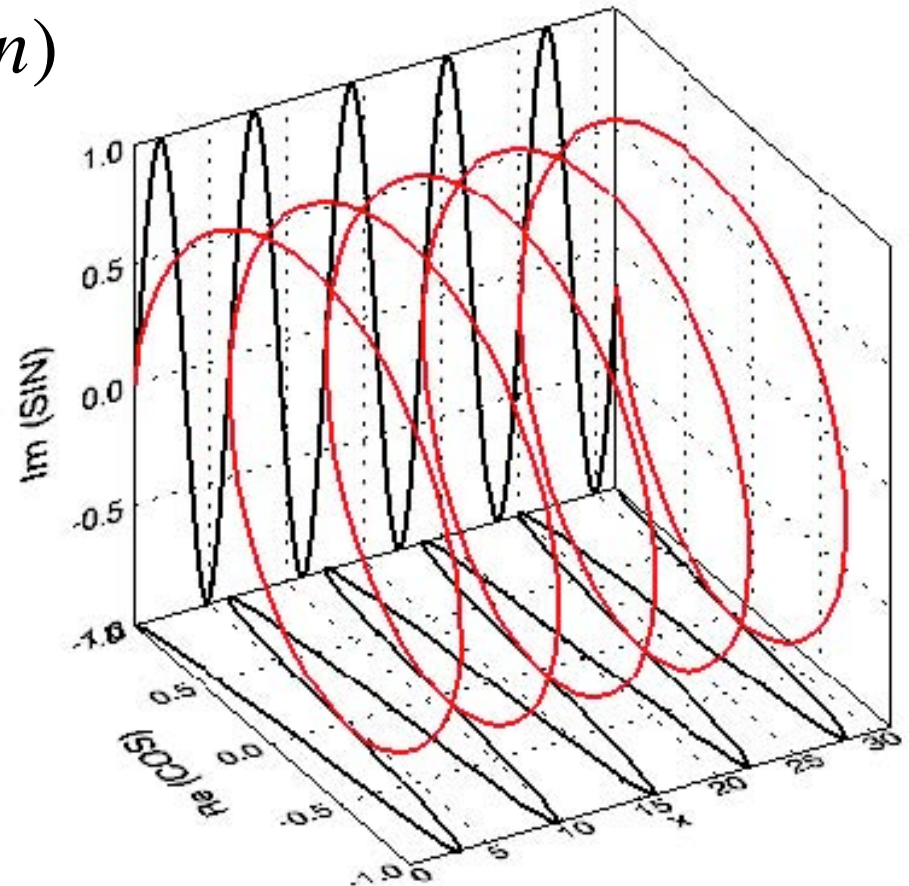


# Fourierbasis (2. Versuch, komplexe Fn.)

- **2. Versuch:** wähle komplexe Funktionen

$$f_u(n) = \cos(un) + i \sin(un)$$

- Wobei  $u$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $u_0 = 2\pi/N$
- $\rightarrow$   $N$  verschiedene Funktionen
- **Ist eine Basis**



# Basisfunktionen der Fourierbasis (N = 2)

- Basisfunktionen  $f_u$   $f_u(n) = \exp\left(\frac{i2\pi}{N}un\right)$
- Wertetabelle:

$f_u(n)$	n=0	n=1
u=0	$\exp(0)=1$	$\exp(0)=1$
u=1	$\exp(0)=1$	$\exp(i\pi) = -1$

- Basisvektoren:  $f_{u=0} = (1, 1)$ ,  $f_{u=1} = (1, -1)$
- Skalarprodukt:  $f_{u=0} * f_{u=1} = 1*1 + 1*(-1) = 0$
- Basiswechselmatrix:  
$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$



# Basisfunktionen der Fourierbasis (N = 4)

- Basisfunktionen  $f_u$   $f_u(n) = \exp\left(\frac{i2\pi}{N}un\right)$
- Wertetabelle:

$f_u(n)$	n=0	n=1	n=2	n=3
<b>u=0</b>	$\exp(0)=1$	$\exp(0)=1$	$\exp(0)=1$	$\exp(0)=1$
<b>u=1</b>	$\exp(0)=1$	$\exp(i\pi/2)=i$	$\exp(i\pi)=-1$	$\exp(i3\pi/2)=-i$
<b>u=2</b>	$\exp(0)=1$	$\exp(i\pi)=-1$	$\exp(i2\pi)=1$	$\exp(i3\pi)=-1$
<b>u=3</b>	$\exp(0)=1$	$\exp(i3\pi/2)=-i$	$\exp(i3\pi)=-1$	$\exp(i9\pi/2)=i$

- Basisvektoren:  $f_{u=0} = (1, 1, 1, 1)$ ,  $f_{u=1} = (1, i, -1, -i)$ ,  
 $f_{u=2} = (1, -1, 1, -1)$ ,  $f_{u=3} = (1, -i, -1, i)$
- Basiswechsellmatrix: 
$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

# 1D-Basisfunktionen

Bildfunktion:  $f(n)$ ,  $n=0, N-1$ ,

1	0	1	0
---	---	---	---

also:  $N$  Basisfunktionen

$b_u(n) = \exp(i \cdot 2\pi / N \cdot n \cdot u)$ , mit Frequenzen  $u=0, N-1$

z.B.  $b_0(n) = [(1, 0), (1, 0), \dots, (1, 0)]$

Transformation **FT** :  $\mathbf{FT}(\mathbf{f}) = \mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{B}$  (Vektor-Matrix-Schreibweise)

$$F(u) = \sum_n f(n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi / N \cdot n \cdot u), \text{ für alle } u=0, N-1$$

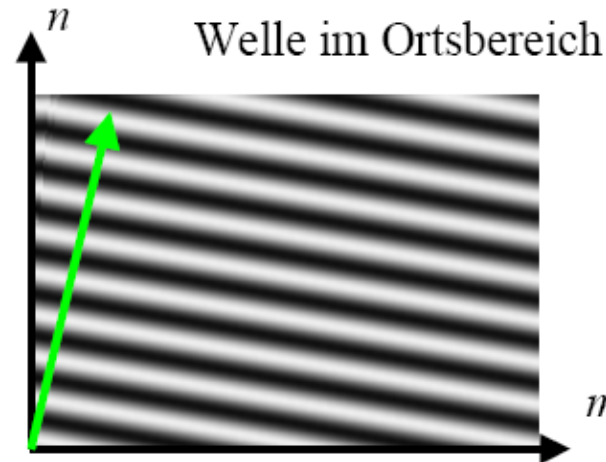
Rücktransformation **FT<sup>-1</sup>** :  $\mathbf{FT}^{-1}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}^T$  (Vektor-Matrix-Schreibweise)

$$f(n) = 1/N \cdot \sum_u F(u) \cdot \exp(i \cdot 2\pi / N \cdot n \cdot u), \text{ für alle } n=0, N-1$$



Skalierungsfaktor, weil die Basisfunktionen nicht normiert sind.

# 2D-Basisfunktionen



Basisfunktionen sind **Wellen** (Frequenz, Richtung, Amplitude, Phase):

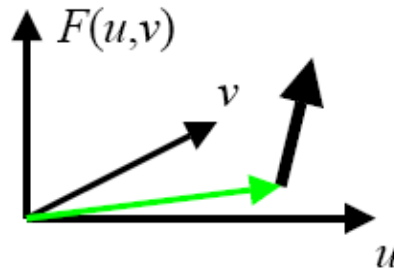
$$\exp(i \cdot 2\pi / N \cdot (mu + nv))$$

**Richtung** ist durch Vektor  $(u \ v)$  gegeben.

Die Basisfunktionen der 2-D Fouriertransformation sind **zerlegbar**:

$$\exp(i \cdot 2\pi / N \cdot (mu + nv)) = \exp(i \cdot 2\pi / N \cdot m \cdot u) \cdot \exp(i \cdot 2\pi / N \cdot n \cdot v)$$

(komplexer) Funktionswert  
im Frequenzbereich



Frequenz:  $f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$

Richtungsvektor:  $r(u, v) = \frac{1}{f(u, v)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

# 2D-Fourier-Transformationspaar

- Transformationspaar für Bilder der Größe  $M \times N$
- Transformation vom Ortsraum in den Frequenzraum

$$F(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot \exp\left(-i2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)\right)$$

- Transformation vom Frequenzraum in den Ortsraum

$$f(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(u, v) \cdot \exp\left(i2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)\right)$$

# 2D-Fourier-Transformationspaar

- Transformationspaar für Bilder der Größe  $N \times N$
- Transformation vom Ortsraum in den Frequenzraum

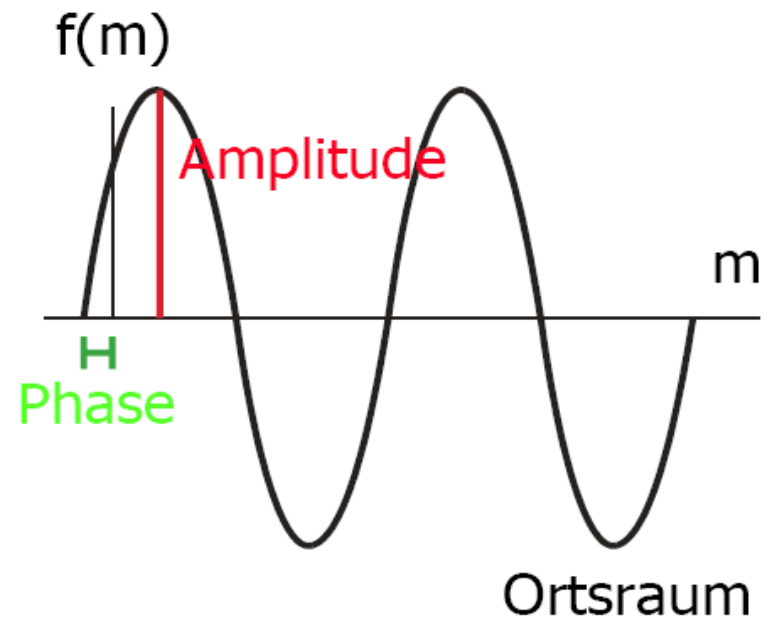
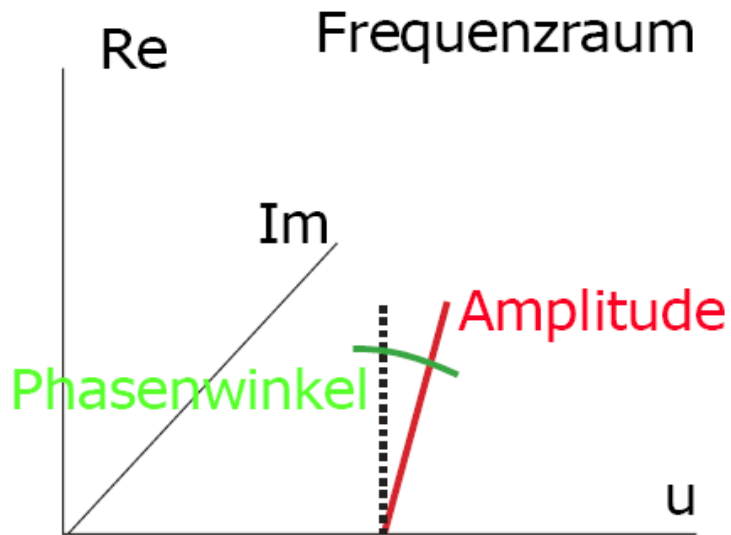
$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} (um + vn)\right)$$

- Transformation vom Frequenzraum in den Ortsraum

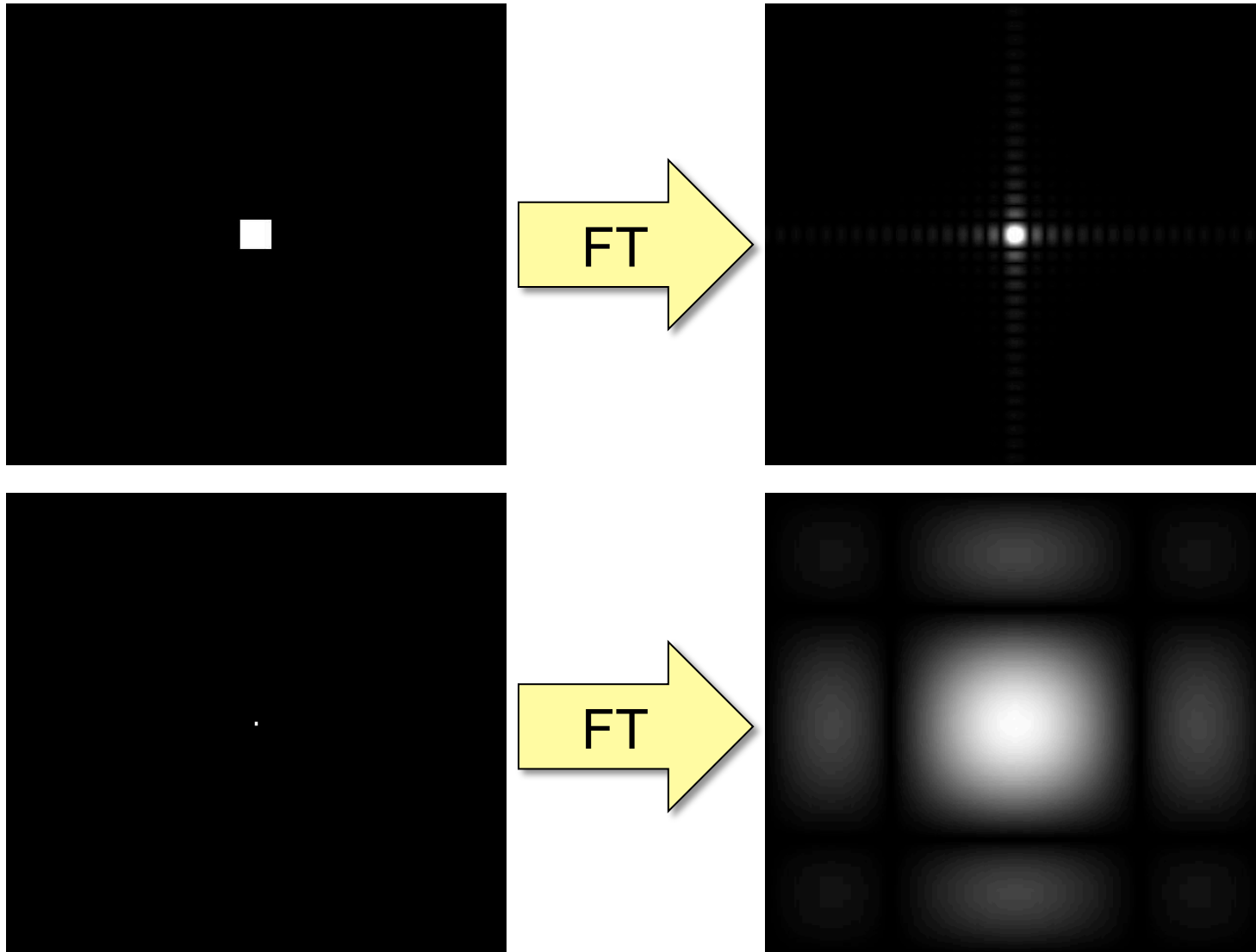
$$f(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(u, v) \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{N} (um + vn)\right)$$

# Phase und Amplitude

- Funktionswerte von  $F(u,v) = a+ib$  sind komplexe Zahlen
  - Betrag eines Funktionswerts: Amplitude =  $|F(u,v)| = \sqrt{a^2+b^2}$
  - Winkel zur reellen Achse: Phase =  $\tan^{-1}(b/a)$
  - Amplitude und Phase sind Parameter der jeweiligen Basisfunktion



# Beispiele für Amplitude



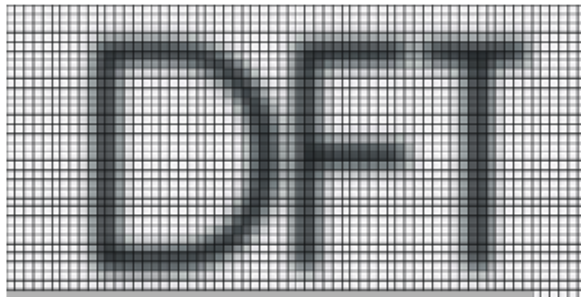
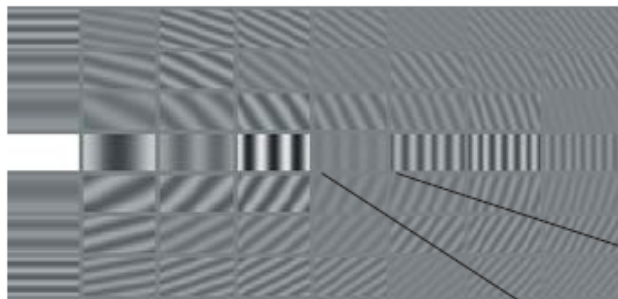


Bild  $f(m,n)$

© Jähne, Digitale Bildverarbeitung

$$= \frac{1}{MN} \cdot \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{i2\pi \left( \frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$$



# Zweidimensionale Fouriertransformation

...



$\times$



$F(4,0)$

$=$



Beispiel einer Basisfunktion:

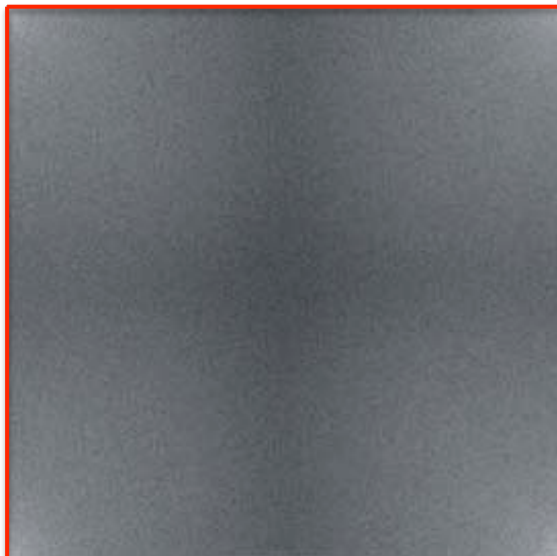


# Darstellungsweise

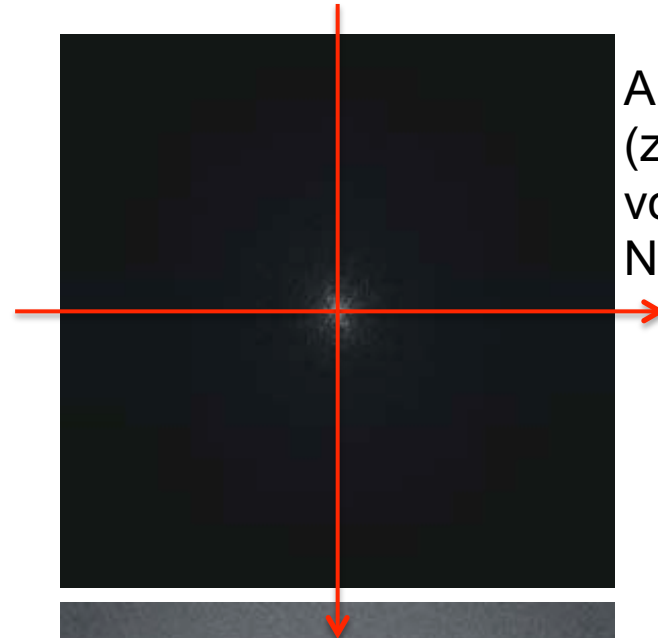
Original



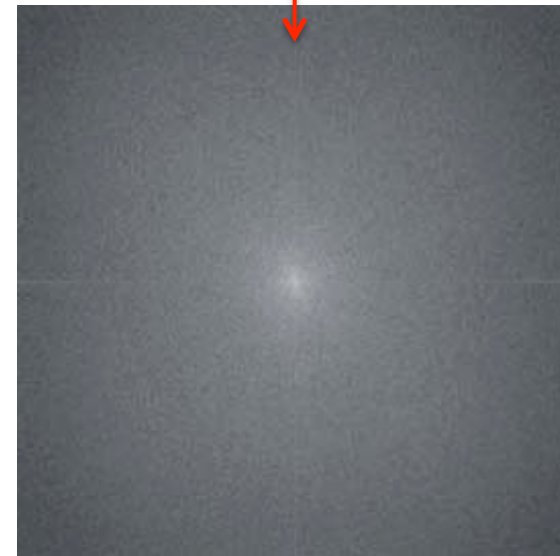
Amplitude  
(log. Skala)



Amplitude  
(zentriert, d.h.  
von  $-N/2$  bis  
 $N/2$ )



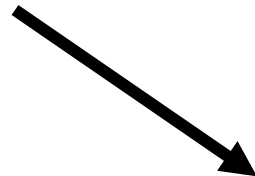
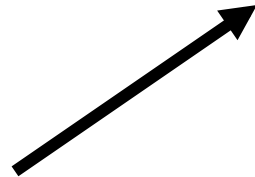
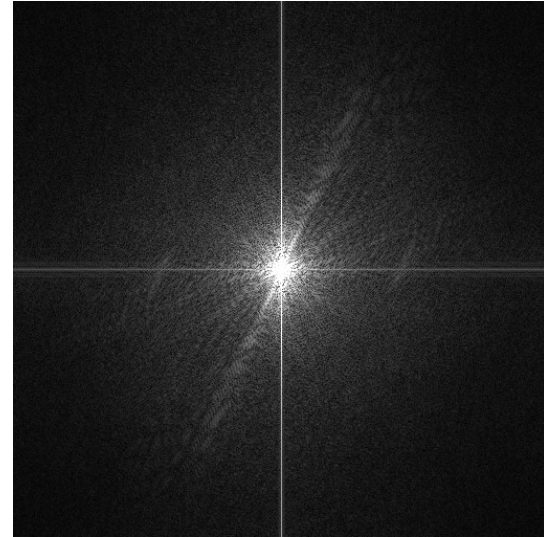
Amplitude  
(zentriert, log.  
Skala)



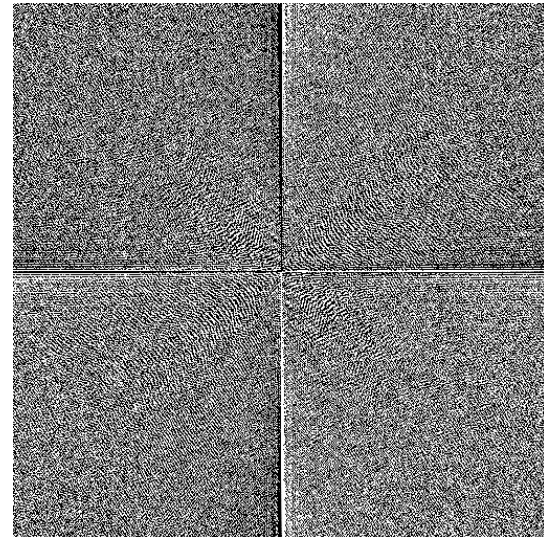
# Beispiel



Amplitude

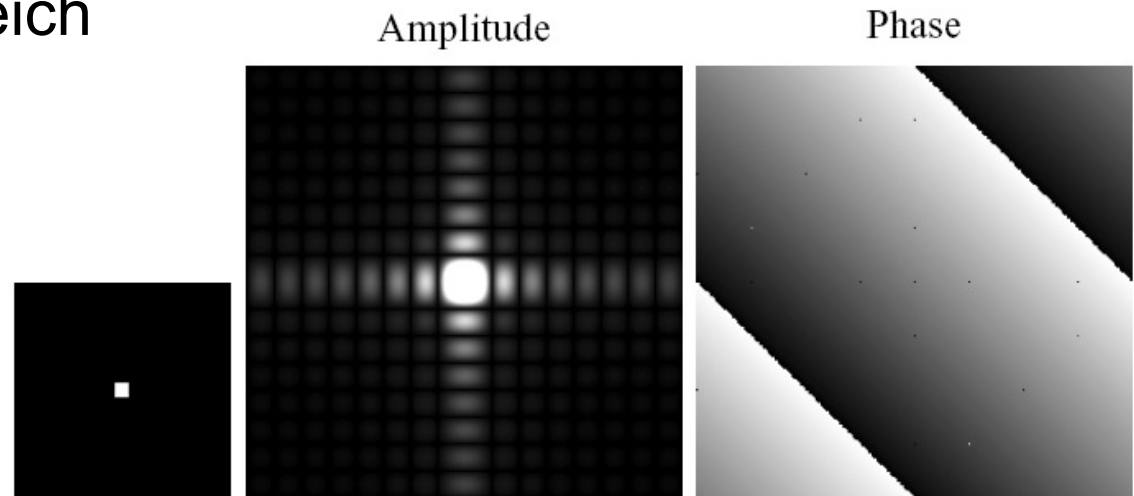


Phase



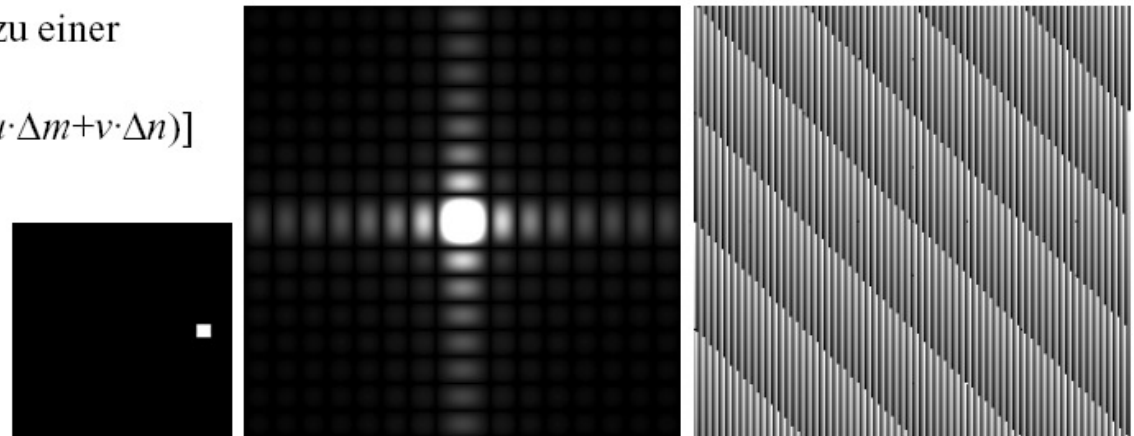
# Translation

- Translation im Ortsbereich führt zu Phasenverschiebung im Frequenzbereich



Translation um  $(\Delta m, \Delta n)$  führt zu einer Phasenverschiebung

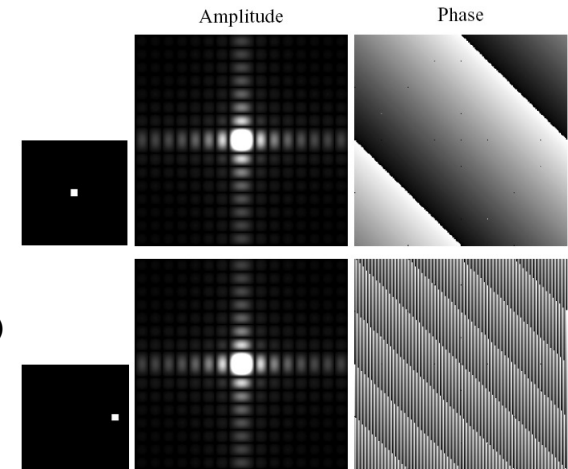
$$F'(u,v) = F(u,v) \cdot \exp[-i \cdot 2\pi/N \cdot (u \cdot \Delta m + v \cdot \Delta n)]$$



# Eigenschaften der 2D-DFT: Translation

- 2D-DFT: 
$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}$$



- Verschiebung im Ortsraum führt zu Phasenverschiebung im Frequenzraum:

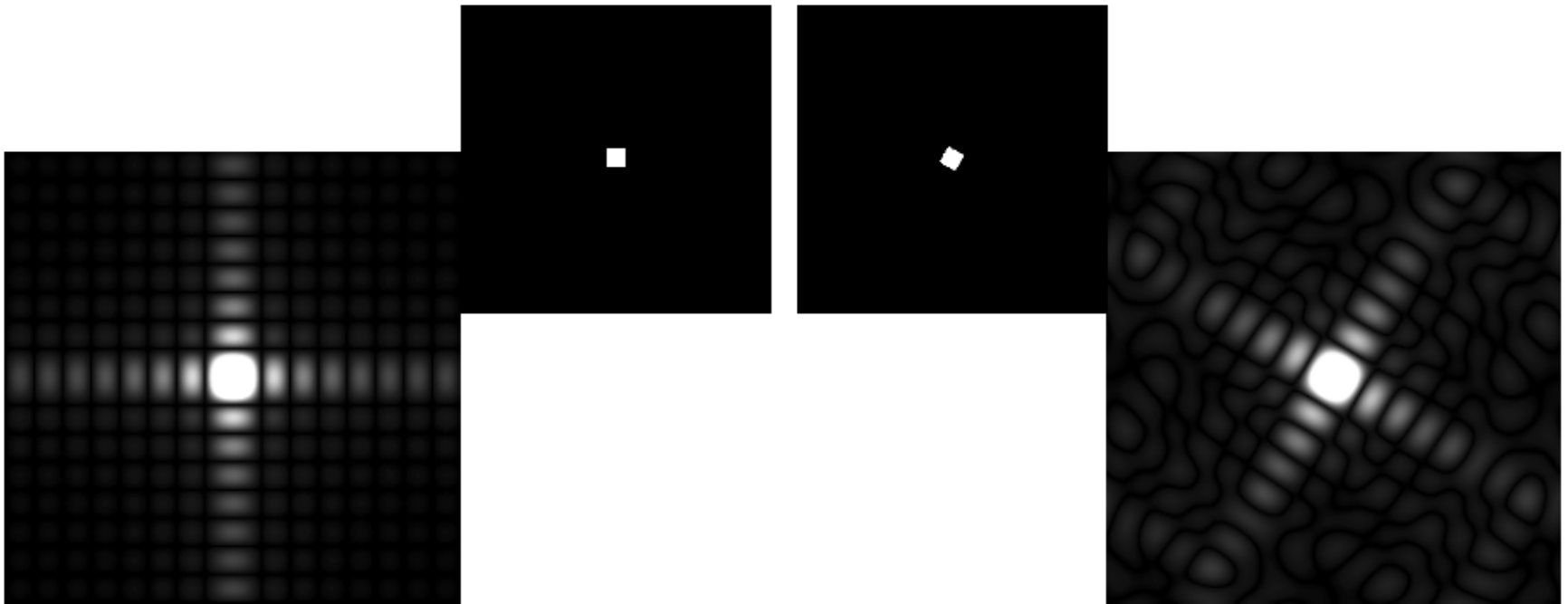
$$f(x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{i2\pi(u(x-x_0)/M+v(y-y_0)/N)}$$

$$= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{i2\pi(ux/M+vy/N)} \cdot e^{-i2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$$

$$= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left[ F(u, v) \cdot e^{-i2\pi(ux_0/M+vy_0/N)} \right] \cdot e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

# Rotation

Rotation:  $F(u,v)$  wird in gleicher Weise rotiert wie  $f(m,n)$ .



# Eigenschaften der 2D-FT: Rotation

- Rotation im Ortsraum führt zu Rotation im Frequenzraum
- Schreibe FT in Matrix-Vektor-Notation:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \cdot e^{i2\pi(xu+yv)} du dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \cdot e^{i2\pi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)} du dv, \quad \text{mit } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = xu + yv$$



- Rotation mit 2x2-Rotationsmatrix R:

$$f\left(R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \cdot e^{i2\pi\left(R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} du dv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(R\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \cdot e^{i2\pi(xu+yv)} du dv$$

nächste Folie

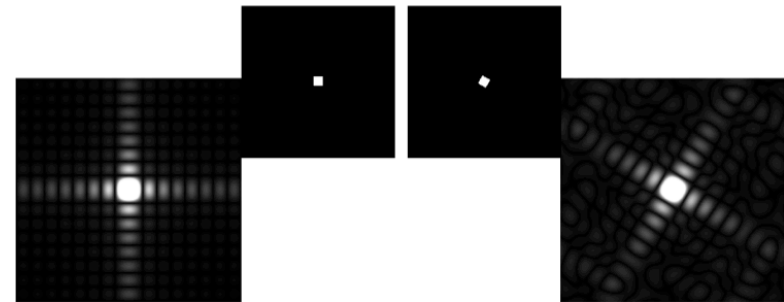


# Eigenschaften der 2D-FT: Rotation

$$f\left(R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \cdot e^{i2\pi\left(\begin{pmatrix} R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)} du dv \quad \text{Rotationsmatrix } R$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(R\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}\right) \cdot e^{i2\pi\left(\begin{pmatrix} R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T R\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}\right)} du dv, \quad \text{mit } R\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = R^T$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(R\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}\right) \cdot e^{i2\pi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T R^T R\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}\right)} du dv$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(R\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}\right) \cdot e^{i2\pi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}\right)} du dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(R\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \cdot e^{i2\pi(xu+yv)} du dv$$

Integration über alle  $(u,v)^T$ , d.h. über die gesamte Ebene, und damit auch über alle  $R^{-1}(u,v)^T$ . Substituierung  $R^{-1}(u,v)^T \rightarrow (u,v)^T$

# Periodizität und Symmetrie

- Für ein- und zweidimensionale Funktionen mit  $M$  bzw.  $M$  und  $N$  Werten gilt:
  - $F(u) = F(u+M), f(m)=f(m+M)$
  - $F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N)$
  - $f(m,n) = f(m+M,n) = f(m,n+N) = f(m+M,n+N)$
- Für reellwertige Funktionen  $f$  gilt für die Fouriertransformierte:
  - $F(u) = *F(-u)$
  - $F(u,v) = *F(-u,-v)$(reduziert die zu berechnenden Werte um die Hälfte)  
\* $x=a-ib$  ist die **komplex-konjugierte** der komplexen Zahl  $x=a+ib$ .

$$F(u) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot \exp\left(-i2\pi \frac{un}{N}\right)$$



# Eigenschaften der 2D-DFT: Periodizität

- 2D-DFT 
$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- Verschiebung im Ortsraum um Vielfache von M, N:

$$f(x - aM, y - bN) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left[ F(u, v) \cdot e^{-i2\pi(u(aM)/M+v(bN)/N)} \right] \cdot e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left[ F(u, v) \cdot e^{-i2\pi(ua+vb)} \right] \cdot e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}, \quad u, v \in N_0, a, b \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{i2\pi(ux/M+vy/N)} = f(x, y)$$

# Zentrierung der 2D-DFT

- Verschiebung um  $M/2$ ,  $N/2$  im Frequenzraum:

$$F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) \Leftrightarrow f(x, y)(-1)^{x+y}$$

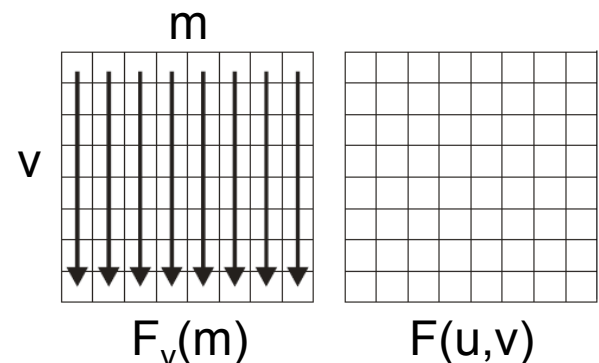
$$F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-i2\pi\left(\left(u - \frac{M}{2}\right)x/M + \left(v - \frac{N}{2}\right)y/N\right)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{i\pi(x+y)} \cdot e^{-i2\pi(ux/M + vy/N)} \quad x, y \in N_0$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[ f(x, y) \cdot (-1)^{x+y} \right] \cdot e^{-i2\pi(ux/M + vy/N)}$$

# Separierbarkeit

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} (um + vn) \right] = \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} vn \right] = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} vn \right] \right) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} vn \right] \right) = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] F_v(m)
 \end{aligned}$$



Vorgehensweise: zunächst  $F_v(m)$  für alle  $(v, m)$  berechnen und dann verwenden.

# Konvolution und Korrelation

- Konvolution und Korrelation sind zwei eng verwandte Filter-Operationen.
- Beide können im Ortsraum und im Frequenzraum ausgeführt werden.
- Die Operation im Frequenzraum ist eine einfache Multiplikation (Aufwand  $N^2$ ).
- Achtung: Padding wegen Periodizität!

$$P = A + B - 1$$

# Konvolution im Frequenzraum

$$F(u) \cdot H(u)$$

$$= \sum_k f(k) \cdot \exp(-i2\pi uk/N) \cdot \sum_m h(m) \cdot \exp(-i2\pi um/N)$$

$$= \sum_m \sum_k [f(k) \cdot \exp(-i2\pi uk/N) \cdot h(m) \cdot \exp(-i2\pi um/N)]$$

$$= \sum_m \sum_k [f(k) \cdot h(m) \cdot \exp(-i2\pi uk/N) \cdot \exp(-i2\pi um/N)]$$

(Verschiebeeigenschaft  $h(m) \cdot \exp(-i2\pi uk/N) = h(m-k)$ )

$$= \sum_m \sum_k f(k) \cdot h(m-k) \cdot \exp(-i2\pi um/N)$$

$$= \sum_m [\sum_k f(k) \cdot h(m-k)] \cdot \exp(-i2\pi um/N)$$

$$= \mathbf{FT}[\sum_k f(k) \cdot h(m-k)] = \mathbf{FT}[[f^*h](m)]$$

# Konvolution im Frequenzraum

- 1D-Konvolution

$$f(x) * h(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot h(x - n)$$

$$\Leftrightarrow F(u) \cdot H(u)$$

- 2D-Konvolution

$$f(x, y) * h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot h(x - m, y - n)$$

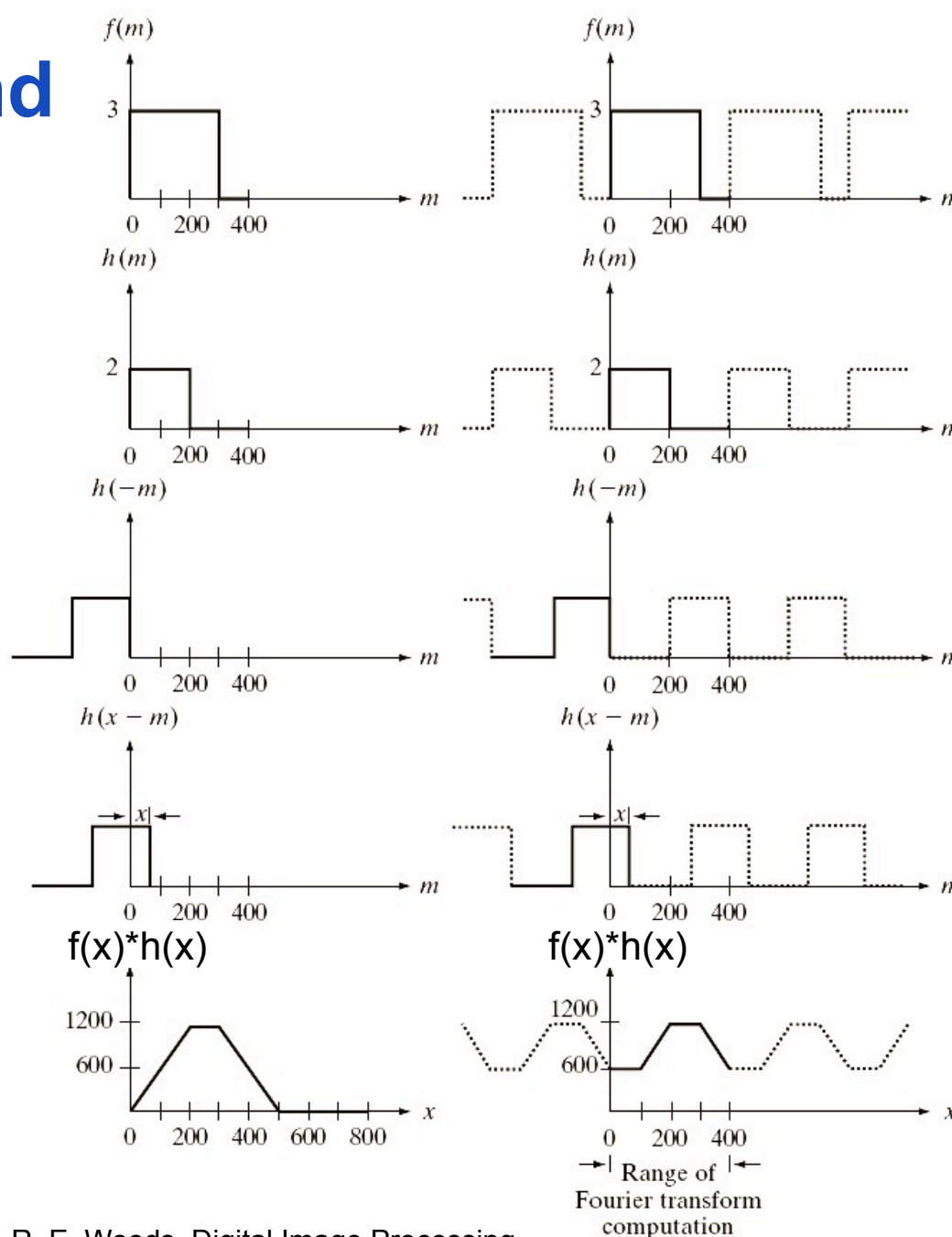
$$\Leftrightarrow F(u, v) \cdot H(u, v)$$

- Periodizität problematisch  $\rightarrow$  Padding

# Wraparound Error

- Konvolution periodischer Funktionen
- Padding:  $P \geq A + B - 1$

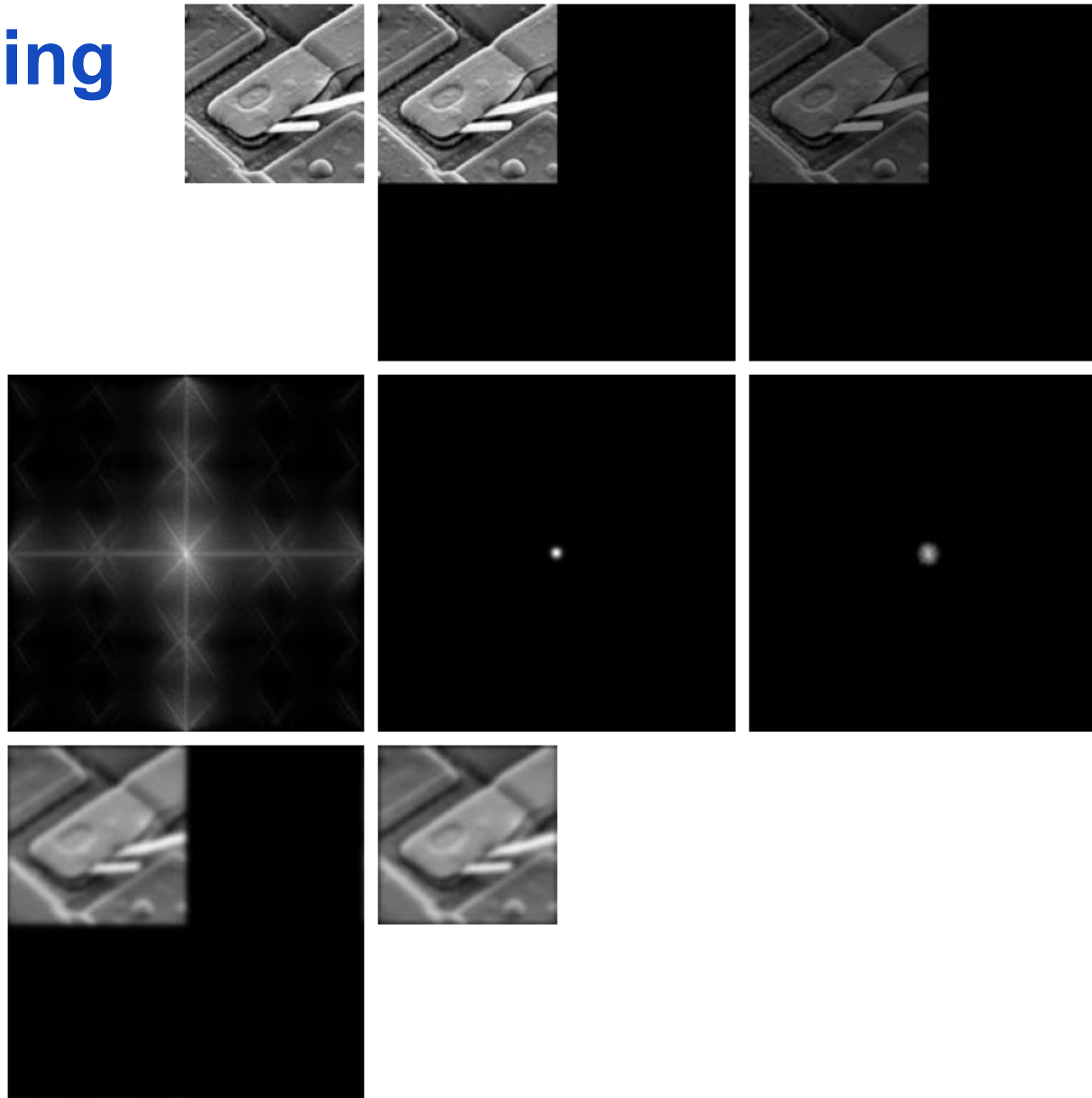
$$f(x) * h(x) = \sum_{m=0}^{399} f(m) \cdot h(x - m)$$



a	f
b	g
c	h
d	i
e	j

**FIGURE 4.28** Left column: convolution of two discrete functions obtained using the approach discussed in Section 3.4.2. The result in (e) is correct. Right column: Convolution of the same functions, but taking into account the periodicity implied by the DFT. Note in (j) how data from adjacent periods produce wraparound error, yielding an incorrect convolution result. To obtain the correct result, function padding must be used.

# Padding



a	b	c
d	e	f
g	h	

**FIGURE 4.36**  
 (a) An  $M \times N$  image,  $f$ .  
 (b) Padded image,  $f_p$  of size  $P \times Q$ .  
 (c) Result of multiplying  $f_p$  by  $(-1)^{x+y}$ .  
 (d) Spectrum of  $F_p$ . (e) Centered Gaussian lowpass filter,  $H$ , of size  $P \times Q$ .  
 (f) Spectrum of the product  $HF_p$ .  
 (g)  $g_p$ , the product of  $(-1)^{x+y}$  and the real part of the IDFT of  $HF_p$ .  
 (h) Final result,  $g$ , obtained by cropping the first  $M$  rows and  $N$  columns of  $g_p$ .



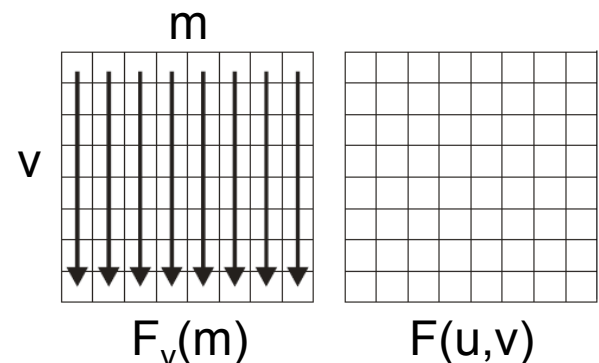
# FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)

# Vorgehensweise generell

- Vereinfachende Annahme:  $N=2^k$ ,  $k>1$
- Nutze Separierbarkeit, um 2D-FT auf 1D zurückzuführen ( $O(N^4) \rightarrow O(N^3)$ )
- Teile Summe in zwei Teilsummen auf
- Finde Gemeinsamkeiten in den Teilsummen und berechne beide Teilsummen miteinander
- Betrachte die Teilsumme und unterteile rekursiv bis  $N=1$  ( $O(N^3) \rightarrow O(N^2 \log N)$ )

# Separierbarkeit

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} (um + vn) \right] = \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} vn \right] = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} vn \right] \right) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} vn \right] \right) = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] F_v(m)
 \end{aligned}$$



Vorgehensweise: zunächst  $F_v(m)$  für alle  $(v, m)$  berechnen und dann verwenden.

# Divide Schritt

- Teile Summe in zwei Teilsummen auf

$$N = 2K, W_N = \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{K}\right), W_N^2 = \exp\left(-i\frac{2\pi}{K}\right) = W_K$$

$$\begin{aligned} F_N(u) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)(W_N)^{un} = \frac{1}{2K} \sum_{n=0}^{2K-1} f(n)(W_{2K})^{un} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_{2K})^{2nu} + \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_{2K})^{(2n+1)u} \right) \end{aligned}$$

- Finde Gemeinsamkeiten in den Teilsummen

$$F_{\text{even},K}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_{2K})^{2nu} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_K)^{nu}$$

$$F_{\text{odd},K}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_{2K})^{2nu} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_K)^{nu}$$

# Ausnutzen der Periodizität

$$N = 2K, \quad W_N = \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{K}\right), \quad W_K = \exp\left(-i\frac{2\pi}{K}\right)$$

$$F_{\text{even},K}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_K)^{nu}, \quad F_{\text{odd},K}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_K)^{nu}$$

$$F_N(u) = \frac{1}{2} \left( F_{\text{even},K}(u) + F_{\text{odd},K}(u)(W_{2K})^u \right)$$

- Berechne  $F(u+K)$

$$(W_K)^{u+N} = (W_K)^u, \quad (W_{2K})^{u+K} = -(W_{2K})^u$$

$$F_N(u+K) = \frac{1}{2} \left( F_{\text{even},K}(u+K) + F_{\text{odd},K}(u+K)(W_{2K})^{u+K} \right)$$

$$F_N(u+K) = \frac{1}{2} \left( F_{\text{even},K}(u) - F_{\text{odd},K}(u)(W_{2K})^u \right)$$

# Ausnutzen der Periodizität

$$N = 2K, W_N = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N}\right)$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \left( F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u) (W_{2K})^u \right)$$

$$F(u + K) = \frac{1}{2} \left( F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u) (W_{2K})^u \right)$$

- Also kann man  $F(u+K)$  mithilfe  $F(u)$  berechnen (einmal  $F_{\text{even}} + F_{\text{odd}}$ , einmal  $F_{\text{even}} - F_{\text{odd}}$ )
- Betrachte die Teilsumme  $[0 \dots K-1]$  und unterteile rekursiv bis  $K=1$  ( $O(n^3) \rightarrow O(n^2 \log n)$ )

# Zusammenfassung

$$N = 2K, W_N = \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$F_N(u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)(W_N)^{nu} = \frac{1}{2} \left( F_{\text{even},K}(u) + F_{\text{odd},K}(u)(W_{2K})^u \right)$$

$$F_{\text{even},K}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_K)^{nu}$$

$$F_{\text{odd},K}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_K)^{nu}$$

$$F_N(u+K) = \frac{1}{2} \left( F_{\text{even},K}(u) - F_{\text{odd},K}(u)(W_{2K})^u \right)$$

# Rekursiver Algorithmus

```
def F_rek(N, (f_0, f_1, f_2, ..., f_{N-1})):
    if N == 1 then return (f_0)
    K = N/2
    F_even = F_rek(K, (f_0, f_2, f_4, ..., f_{N-2}))
    F_odd = F_rek(K, (f_1, f_3, f_5, ..., f_{N-1}))
    F = zeros(N)
    for u = 0..K-1:
        F[u] = 0.5 * (F_even[u] + F_odd[u] * W_N^u)
        F[u+K] = 0.5 * (F_even[u] - F_odd[u] * W_N^u)
    return F
```

$$F_N(u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)(W_N)^{nu} = \frac{1}{2} (F_{\text{even},K}(u) + F_{\text{odd},K}(u)(W_{2K})^u)$$

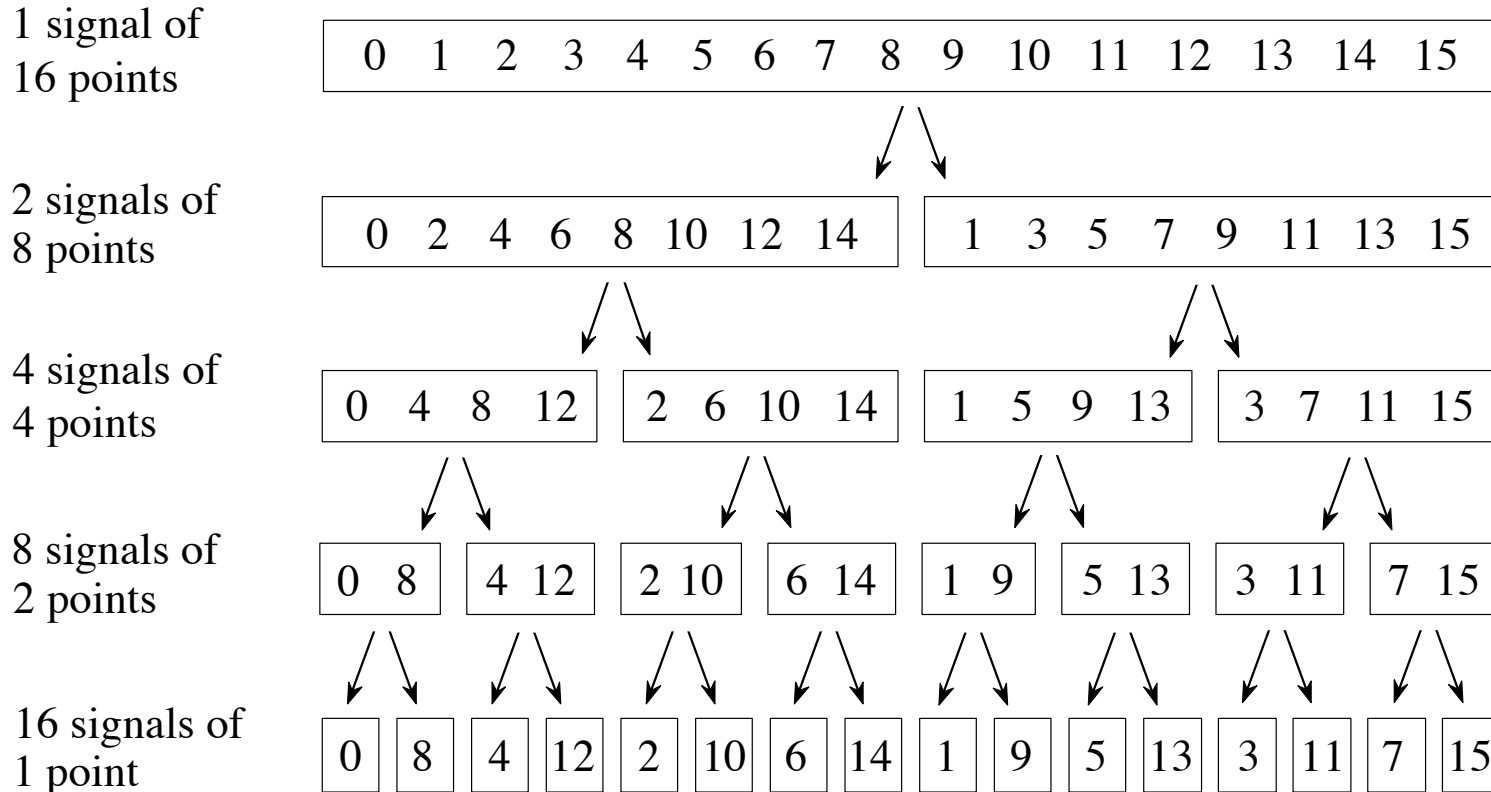
$$F_{\text{even},K}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_K)^{nu}$$

$$F_{\text{odd},K}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_K)^{nu}$$

$$F_N(u+K) = \frac{1}{2} (F_{\text{even},K}(u) - F_{\text{odd},K}(u)(W_{2K})^u)$$



# Rekursive Aufteilung in $F_{\text{odd}}$ und $F_{\text{even}}$

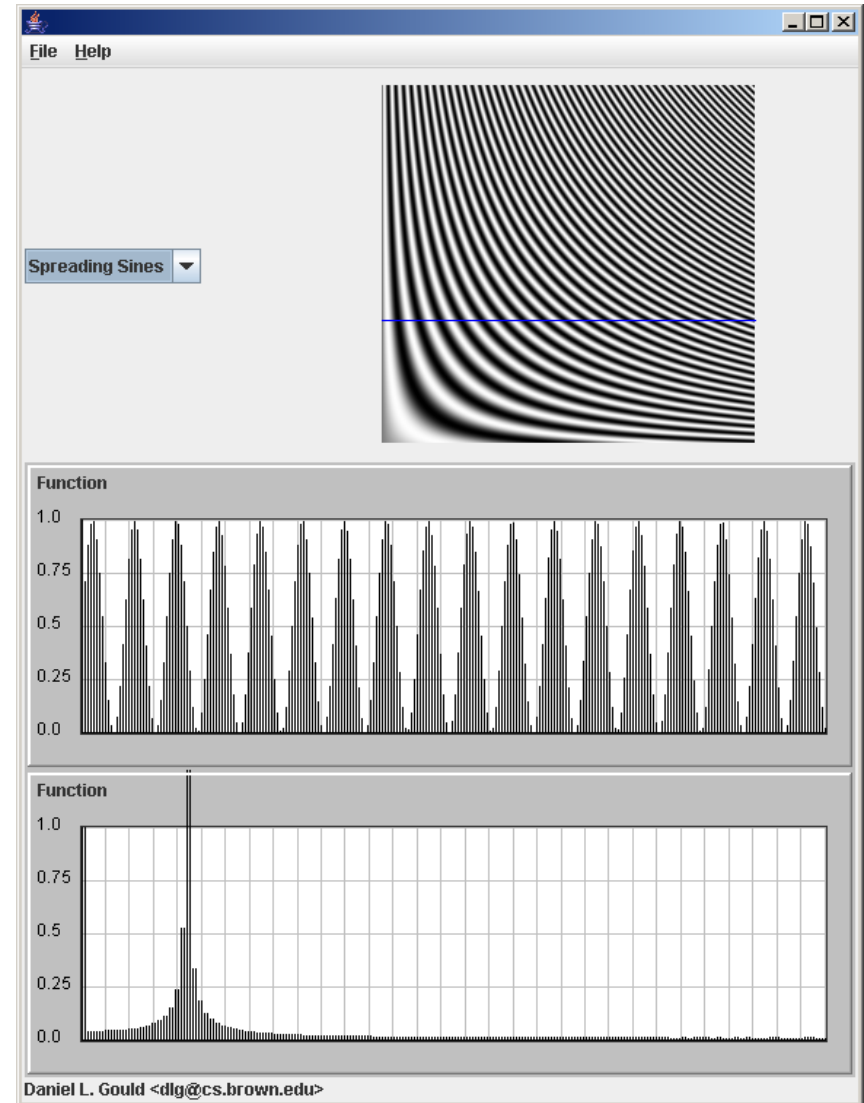


- Signal aus  $N$  Datenpunkten in  $N$  Signale mit je einem Datenpunkt umwandeln
- Frequenzspektra der  $N$  Zeitraumssignale berechnen
- $N$  Spektra zu einem einzelnen Spektrum zusammenfassen

[Abbildungen zu FFT aus: *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, <http://www.dspguide.com/CH12.PDF>]

# Fourier Transformation zum Anschauen

- <http://www.cs.brown.edu/exploratories/>



# EIGENSCHAFTEN DER FOURIER-TRANSFORMATION

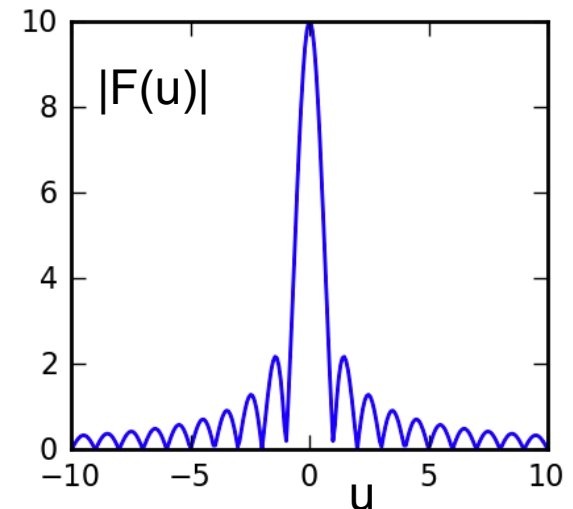
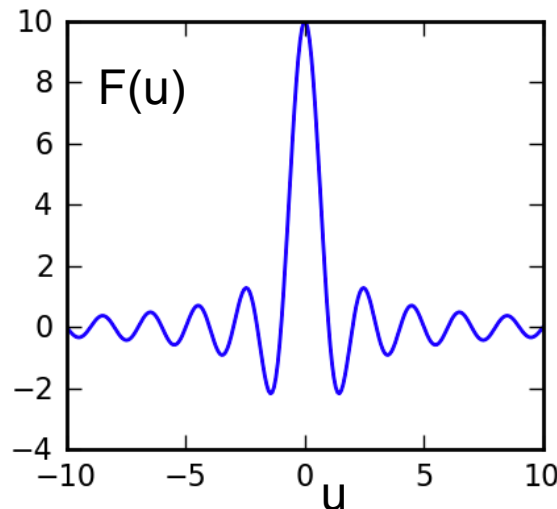
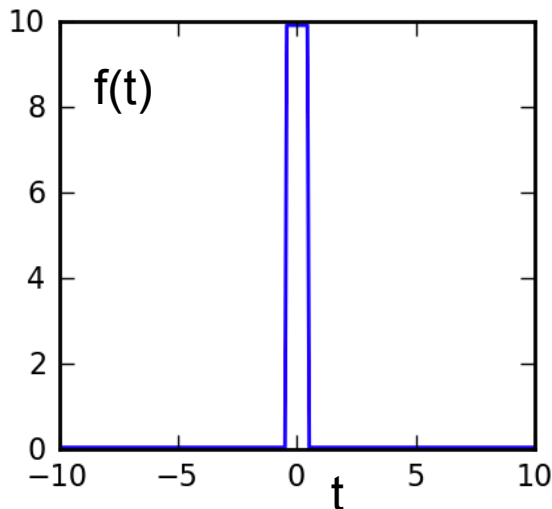
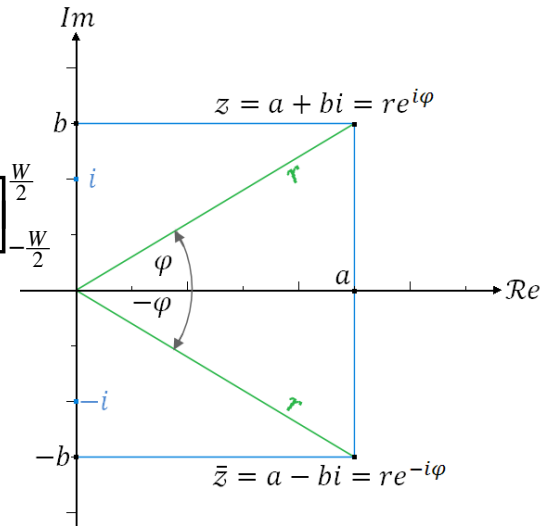
# Fourier-Transformation einer Box-Funktion

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{falls } -\frac{W}{2} \leq t \leq \frac{W}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i2\pi ut} dt = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} A \cdot e^{-i2\pi ut} dt = -\frac{A}{i2\pi u} \left[ e^{-i2\pi ut} \right]_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}$$

$$= -\frac{A}{i2\pi u} \left[ e^{-i2\pi u \frac{W}{2}} - e^{i2\pi u \frac{W}{2}} \right] = \frac{A}{i2\pi u} \left[ e^{i\pi u W} - e^{-i\pi u W} \right]$$

$$= \frac{A}{i2\pi u} i2 \sin(\pi u W) = AW \frac{\sin(\pi u W)}{\pi u W} \quad \text{“Ringing-Artefakt”}$$



# Fourier-Transformation einer Gauß-Funktion

$$f(t) = e^{-at^2}$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i2\pi ut} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-i2\pi ut} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot [\cos(2\pi ut) - i \sin(2\pi ut)] dt$$

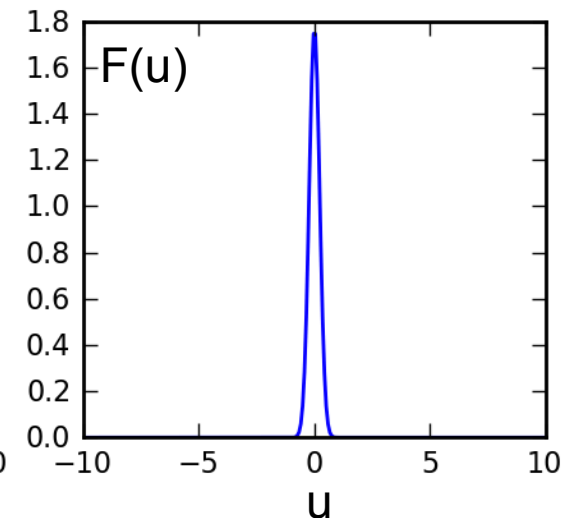
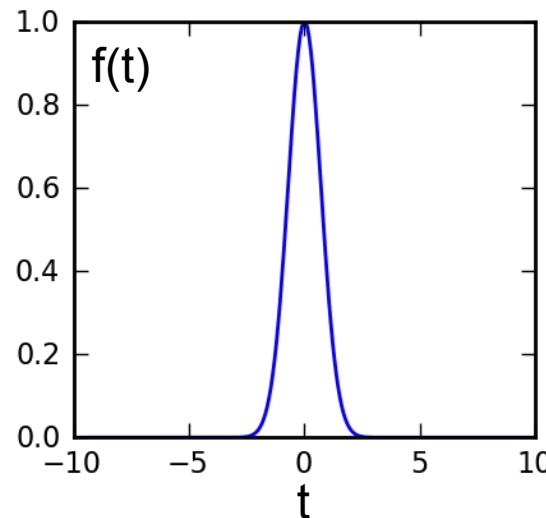
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot \cos(2\pi ut) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot \sin(2\pi ut) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot \cos(2\pi ut) dt - 0$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 u^2 / a}$$

erstes Integral:  
Handbook of  
Mathematical  
Functions...

sin ist punktsymmetrisch  
zum Ursprung,  
insgesamt ist zweiter  
Integrand ungerade,  
symmetrische  
Integrationsgrenzen: 0

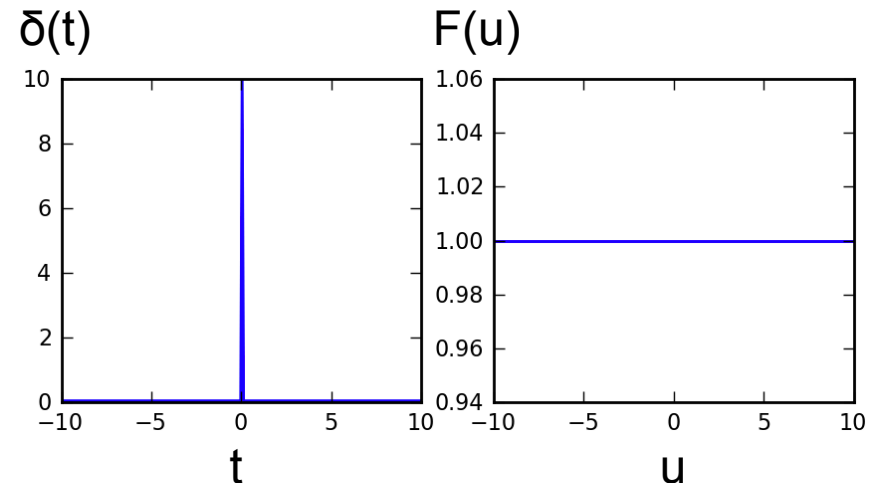


# Fourier-Transformation eines Impulses im Ortsraum

- Impuls im Ursprung wird zu Konstante im Frequenzraum

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i2\pi ut} dt = e^{-i2\pi u \cdot 0} = e^0 = 1$$



- Impuls an der Stelle  $t_0$  wird liegt auf Einheitskreis im Frequenzraum

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-i2\pi ut} dt = e^{-i2\pi ut_0}$$